Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题全解5

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系
许 宁 廖良文 编著

多元函数的微分学 带参数的积分

A·P·G 安徽出版集团
安徽人民出版社
ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

责任编辑/王书法　封面设计/王国亮

经典名著最新版本

全书增补数百新题

题型最全题量最大

数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全解（一）——分析引论

吉米多维奇数学分析习题全解（二）——一元函数的微分学

吉米多维奇数学分析习题全解（三）——不定积分　定积分

吉米多维奇数学分析习题全解（四）——级数

吉米多维奇数学分析习题全解（五）——多元函数的微分学　带参数的积分

吉米多维奇数学分析习题全解（六）——重积分和曲线积分

吉米多维奇数学分析习题全集

ISBN 978-7-212-02699-8

9 787212 026998 >

定价：22.00 元

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

（五）

南京大学数学系

许　宁　廖良文　编著

杨立信　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.5/(苏)吉米多维奇著.许宁,廖良文编著.—合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978—7—212—02699—8

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②许…③廖… Ⅲ.数学分析—高等学校—解题Ⅳ.017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113596 号

吉米多维奇数学分析习题全解(五)

(苏)吉米多维奇 著 许 宁 廖良文 编著 杨立信 译

责任编辑 王玉法 **封面设计** 王国亮
出版发行 安徽人民出版社
地　　址 合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场
邮编:230071
发 行 部 0551—3533258　　0551—3533292(传真)
经　　销 新华书店
印　　刷 南京新洲印刷有限公司
开　　本 880×1230 1/32 **印张** 17.25 **字数** 400 千
版　　次 2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)
标准书号 ISBN978—7—212—02699—8
定　　价 22.00 元

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第13版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第六章　多变量函数的微分运算

§1. 函数的极限　连续性

1. **函数的极限**　设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在具有聚点 P_0 的集 E 上有定义. 若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$, 使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P_1,P_0)<\delta$(这里 $\rho(P_1,P_0)-P$ 与 P_0 两点之间的距离), 就有 $|f(P)-A|<\varepsilon$, 则称

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2. **连续性**　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 点是连续的. 若它在该域的每一个点都是连续的, 则函数 $f(P)$ 在此域内是连续的.

3. **一致连续性**　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 存在仅与 ε 的 $\delta>0$, 使得对于域 G 中的任意点 P',P'', 只要是 $\rho(P',P'')<0$ 就成立不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

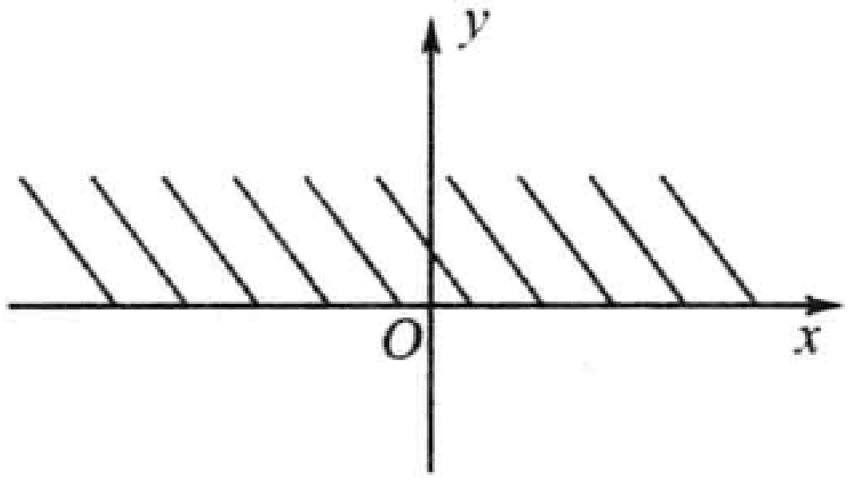
则称函数 $f(P)$ 在 G 域内是一致连续的.

在有界闭域内连续的函数在这个域内是一致连续的.

确定并作出下列函数的存在域(3136 ~ 3150).

【3136】　$u=x+\sqrt{y}$.

解　由 $u=x+\sqrt{y}$ 知 $y\geqslant 0$ 时式子有意义, 于是定义域为 $\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty, y\geqslant 0\}$, 即上半平面, 如 3136 题图.

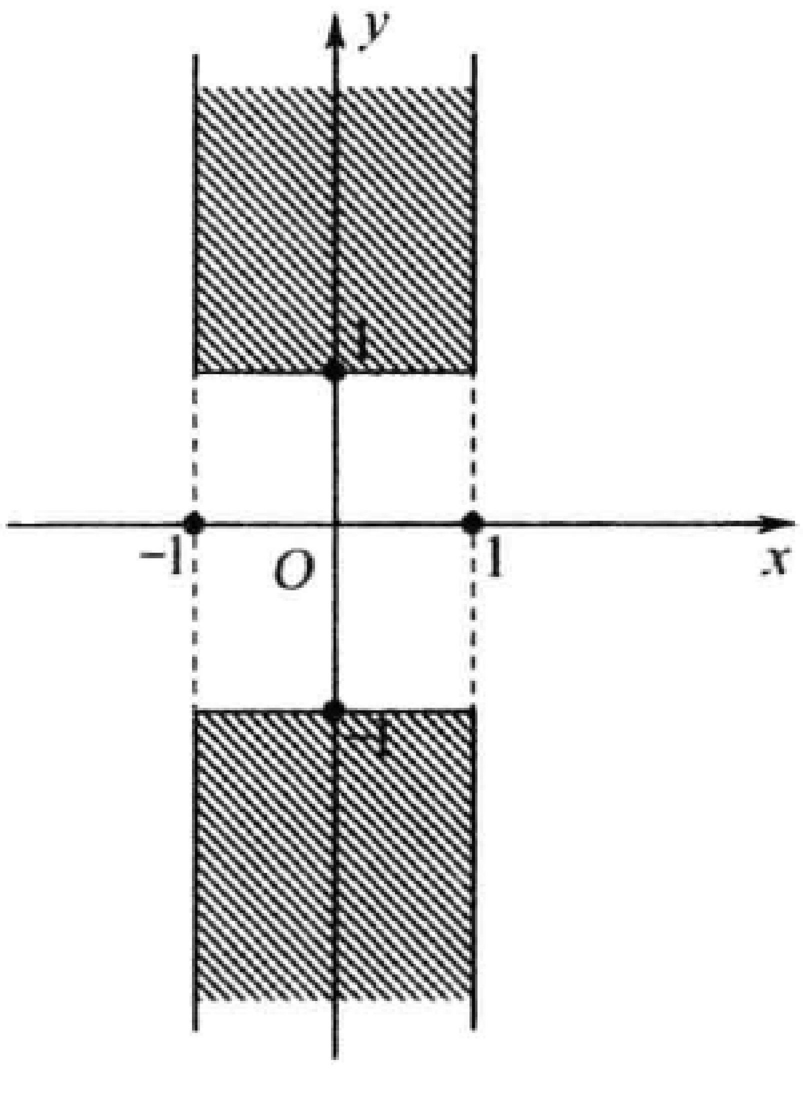


3136 题图

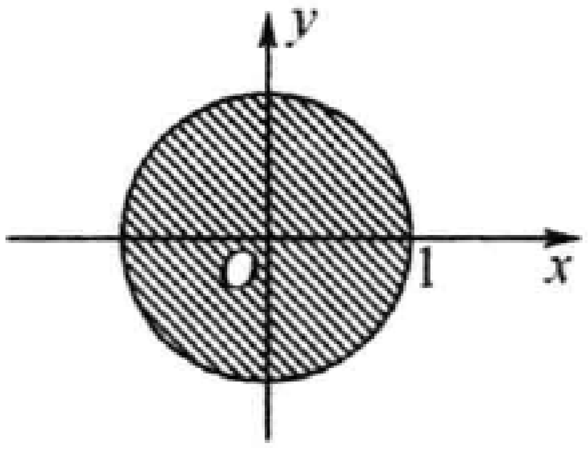
【3137】 $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 由 $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$,
知当 $1-x^2\geqslant 0$ 且 $y^2-1\geqslant 0$ 时,即 $|x|\leqslant 1$, $|y|\geqslant 1$ 时函数有意义,于是定义域为 $\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, |y|\geqslant 1\}$,

如 3137 题图的阴影部分.



3137 题图



3138 题图

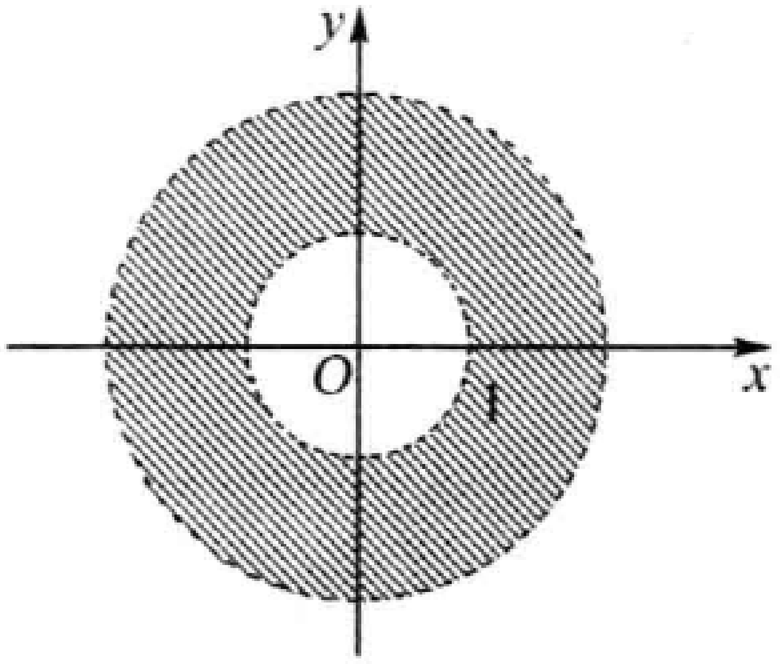
【3138】 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 由 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 知,当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时,此式有意义,于是定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,如 3138 题图的阴影部分.

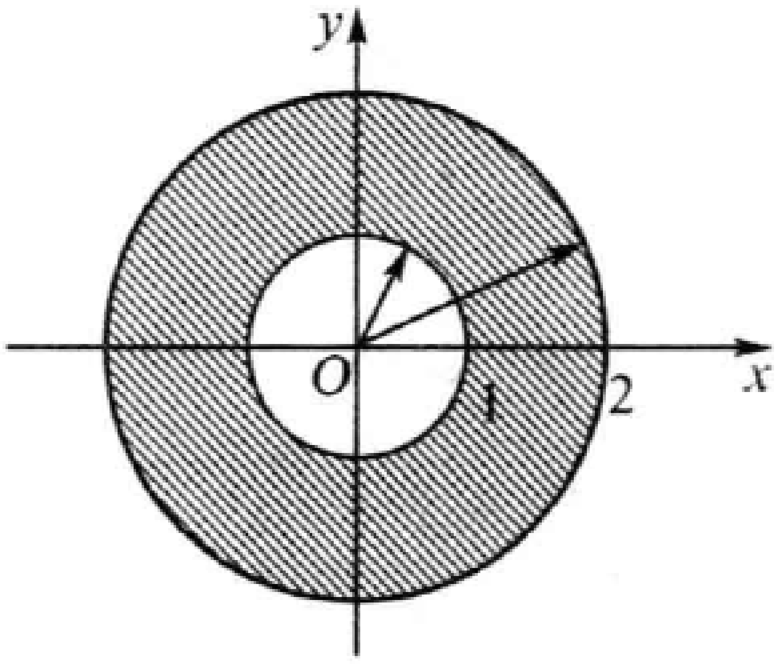
【3139】 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 由 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 知,此式有意义的范围是 x^2+y^2

>1，于是定义域为$\{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$，如 3139 题图的阴影部分.



3139 题图



3140 题图

【3140】 $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解　由题意有，定义域为$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$，如 3140 题图的阴影部分所示.

【3141】 $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

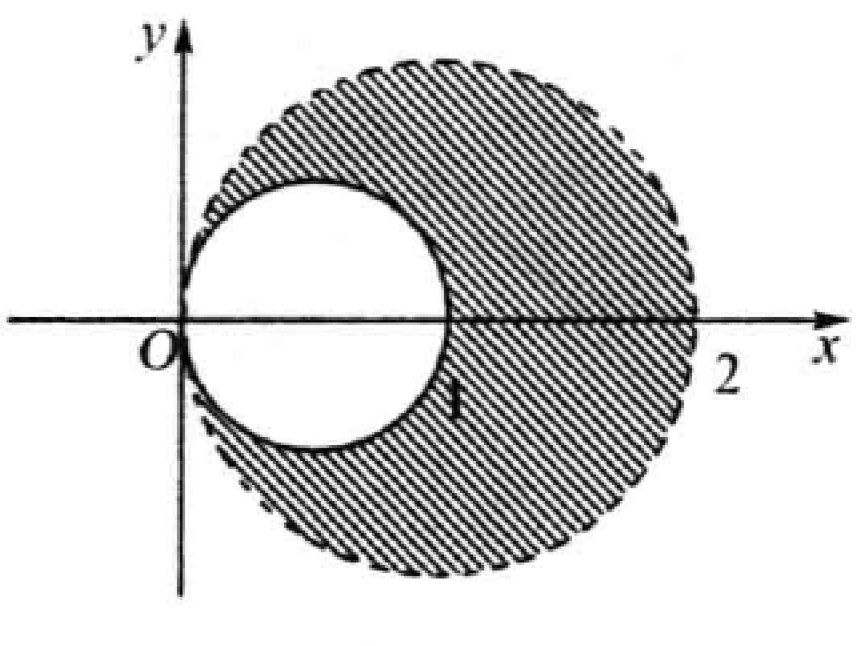
解　由题意，存在域$\{(x,y) \mid x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2x\}$，

即

$$\left\{(x,y) \left| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right.\right\}$$

$$\cap \{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2<1\},$$

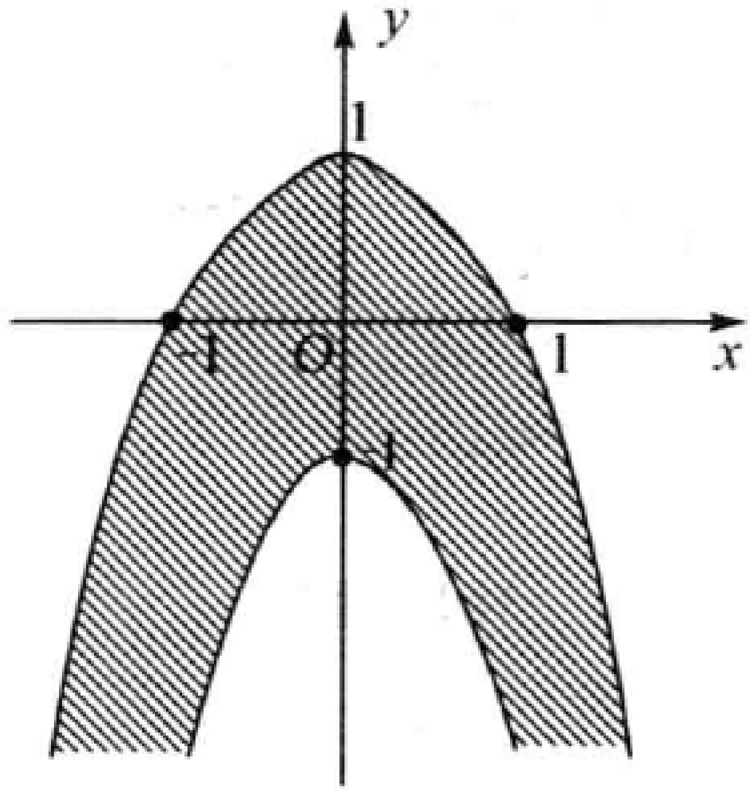
如 3141 题图的阴影部分所示.



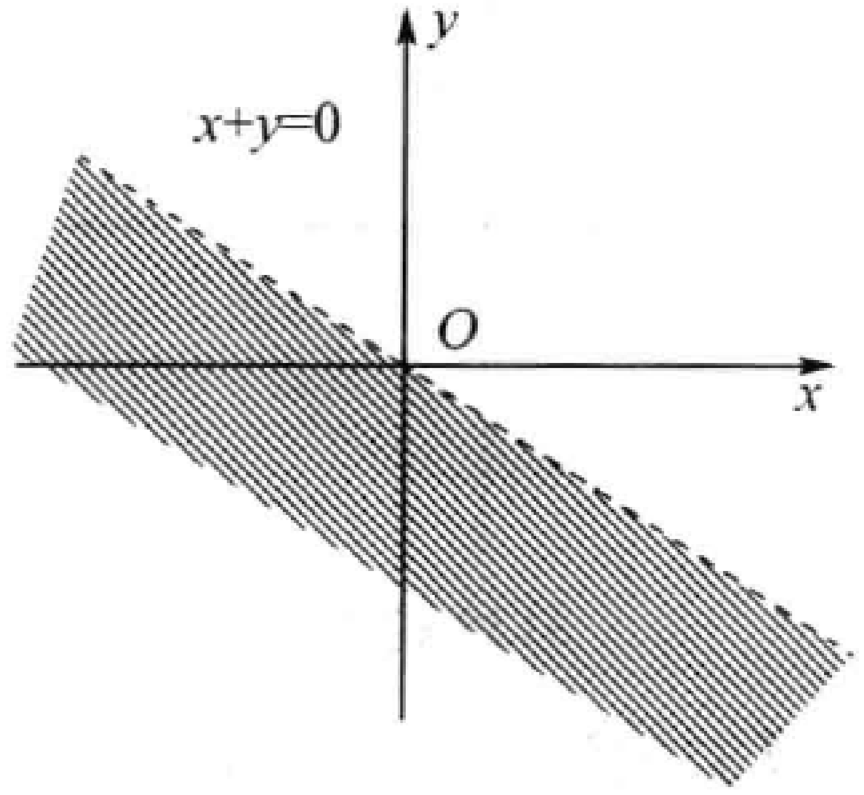
3141 题图

【3142】 $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 由题意,定义域为$\{(x,y)\mid -1\leqslant x^2+y\leqslant 1\}$,图形如3142题图的阴影部分所示.



3142 题图



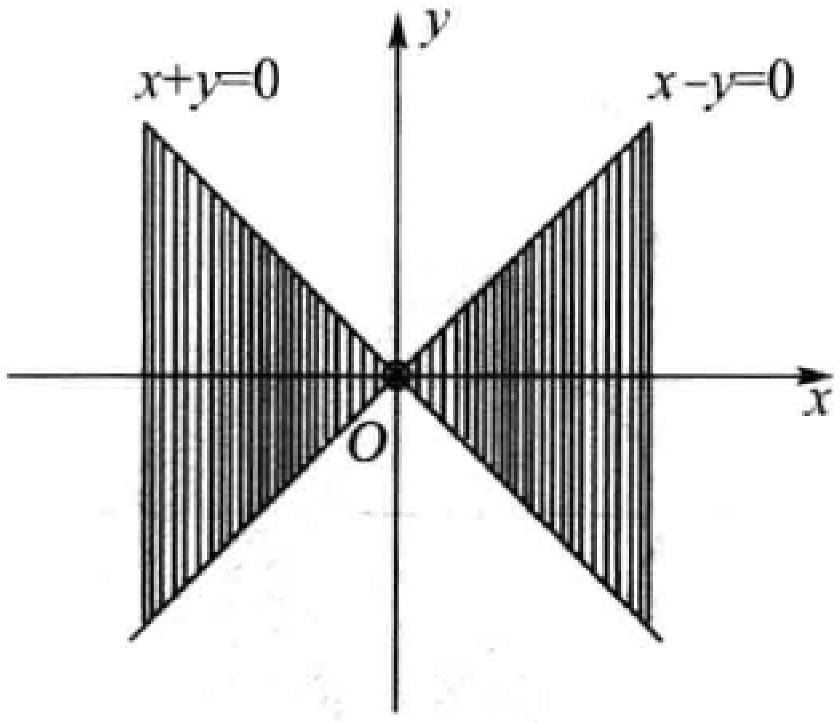
3143 题图

【3143】 $u=\ln(-x-y)$.

解 由题意,定义域为$\{(x,y)\mid x+y<0\}$,图形如3143题图的阴影部分所示.

【3144】 $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 定义域为$\left\{(x,y)\,\middle|\,\left|\dfrac{y}{x}\right|\leqslant 1\right\}$,图形如3144题图的阴影部分所示.



3144 题图

【3145】 $u = \arccos \dfrac{x}{x+y}$.

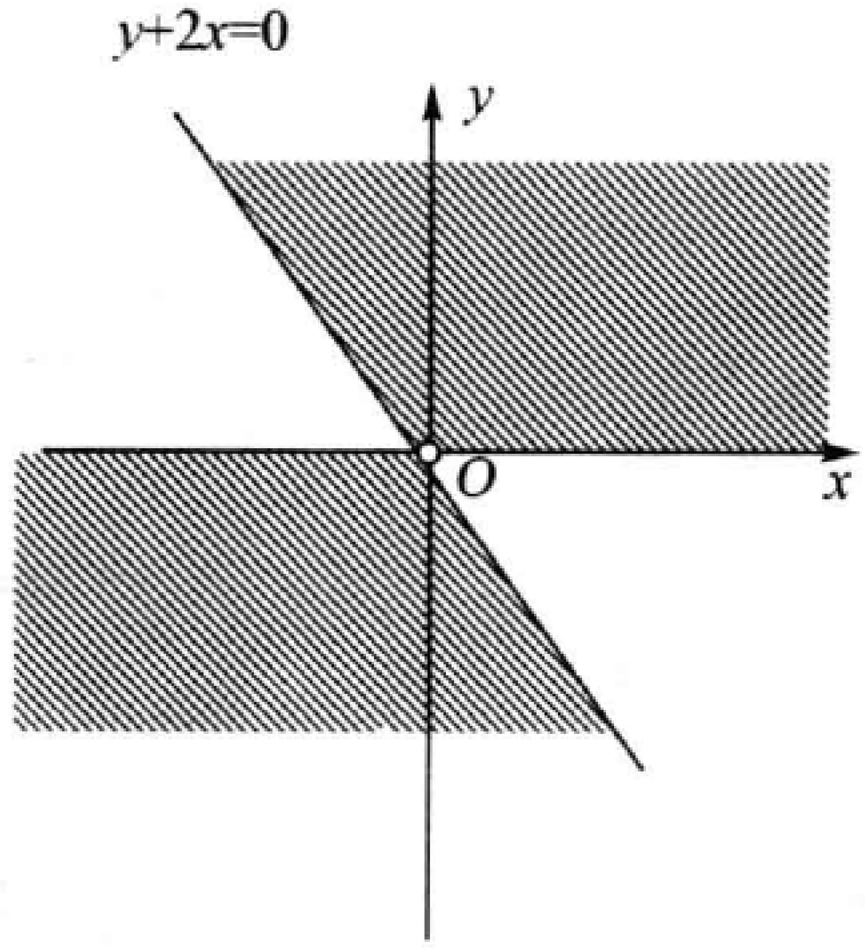
解 由

$$u = \arccos \frac{x}{x+y},$$

知 $$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1,$$

解之有$\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \geqslant -2x \end{cases}$或$\begin{cases} y \leqslant 0 \\ y \leqslant -2x \end{cases}$，且 x, y 不能同时为零，所以定义域为$\{(x,y) \mid y \geqslant 0, y \geqslant -2x, x, y$ 不能同时为零$\} \cup \{(x,y) \mid y \leqslant 0, y \leqslant -2x, x, y$ 不能同时为零$\}$

图形如 3145 题图的阴影部分所示.



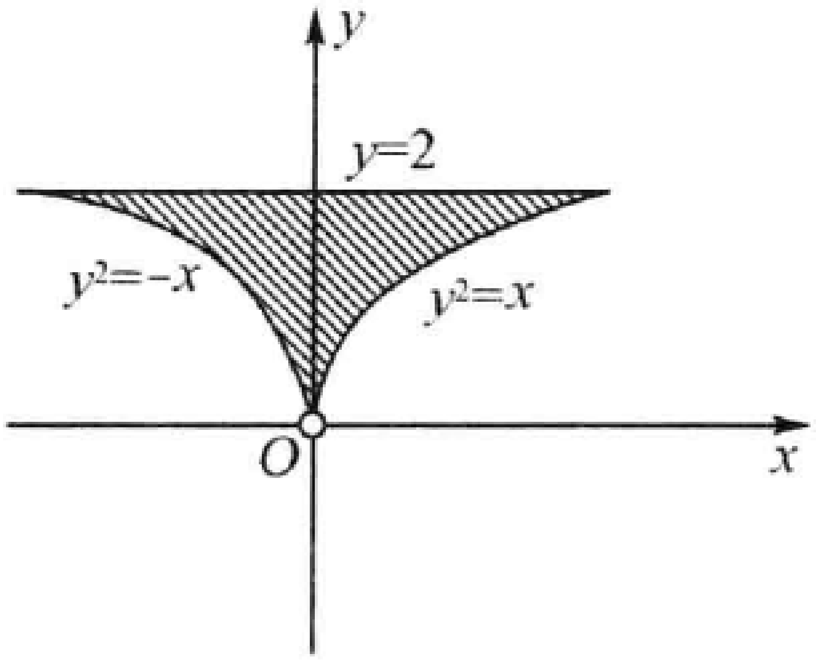
3145 题图

【3146】 $u = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin (1-y)$.

解 定义域为

$$\left\{ (x,y) \,\middle|\, \left|\frac{x}{y^2}\right| \leqslant 1, \mid 1-y \mid \leqslant 1, y \neq 0 \right\}$$
$$= \{(x,y) \mid y^2 \geqslant x, 0 < y \leqslant 2\}$$
$$\cap \{(x,y) \mid y^2 \geqslant -x, 0 < y \leqslant 2\},$$

图形如 3146 题图的阴影部分所示.



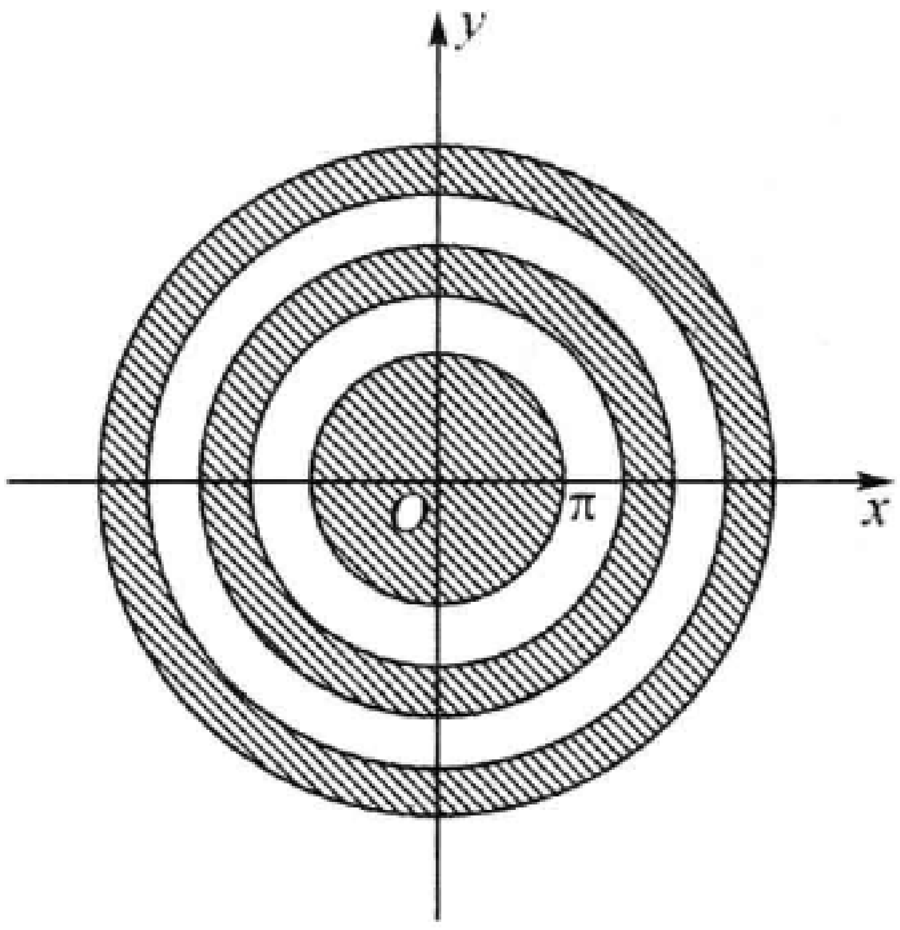
3146 题图

【3147】 $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

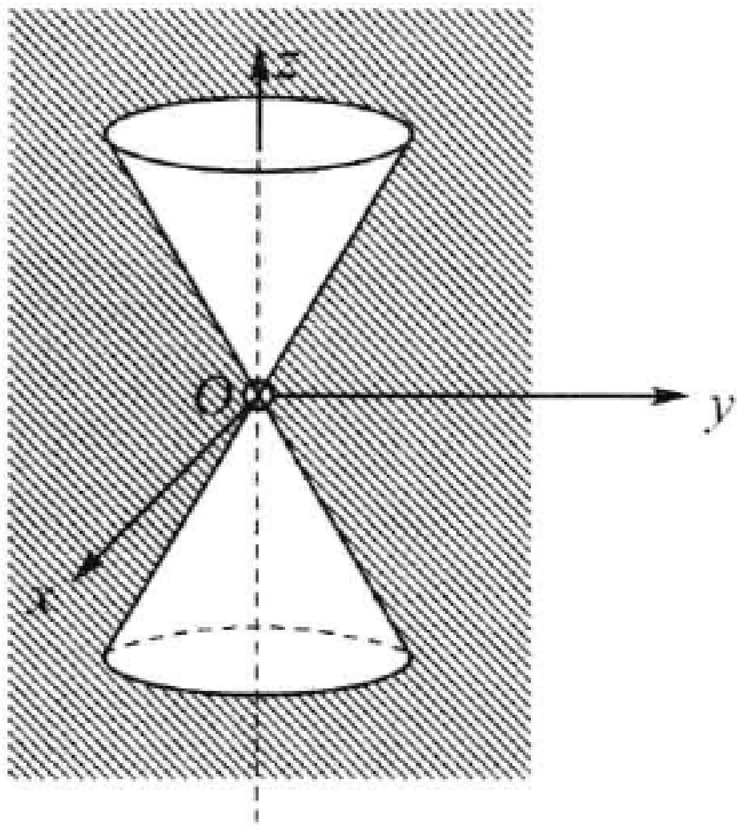
解 定义域为

$$\{(x,y)\mid 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots\},$$

图形如 3147 题图的阴影部分所示.



3147 题图



3148 题图

【3148】 $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 定义域为

$$\left\{(x,y,z)\left|\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1,x^2+y^2\neq 0\right.\right\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\},$$

图形如 3148 题图的阴影部分所示.

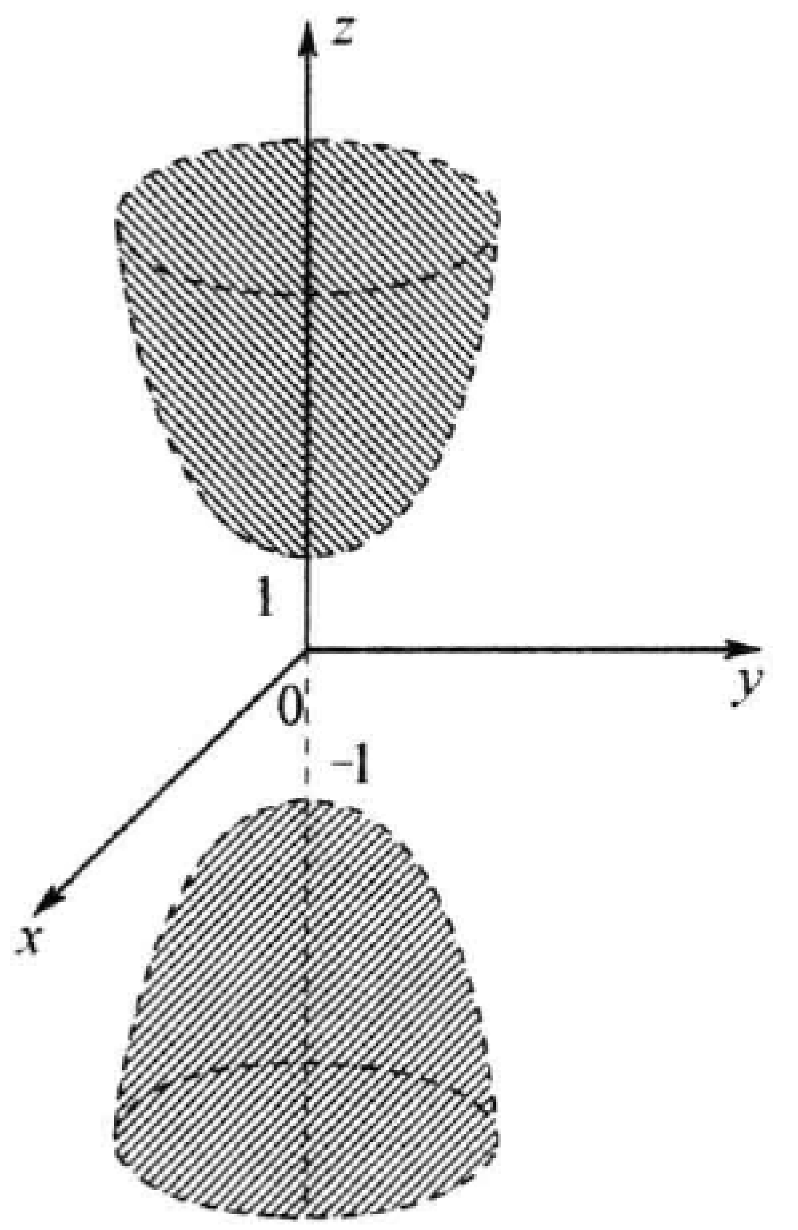
【3149】 $u = \ln(xyz)$.

解　定义域为 $\{(x,y,z) \mid xyz > 0\}$,

即 $x > 0, y > 0, z > 0$;或 $x > 0, y < 0, z < 0$;或 $x < 0, y < 0, z > 0$;或 $x < 0, y > 0, z < 0$ 其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体,但不包括坐标面,图形大家熟知,省略.

【3150】 $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

解　存在域 $\{(x,y,z) \mid -x^2 - y^2 + z^2 > 1\}$,这是双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部,如 3150 题图阴影部分所示,不包括界面在内.

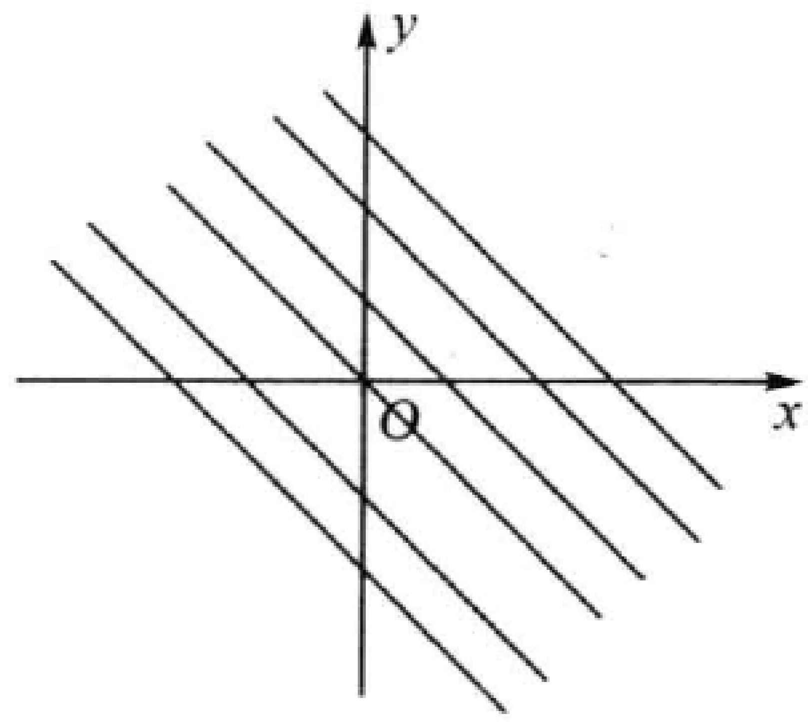


3150 题图

作出下列函数的等位线(3151 ~ 3165).

【3151】 $z = x + y$.

解　等位线为平行直线族 $x + y = k, k \in \mathbf{R}$,图形如 3151 题图所示.



3151 题图

【3152】 $z=x^2+y^2$.

解 等位线为曲线族，$x^2+y^2=a^2(a\geqslant 0)$，

当 $a=0$ 时为原点，当 $a>0$ 时，为以原点为圆心的同心圆族.

【3153】 $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族 $x^2-y^2=k$，当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线，$y=x$，$y=-x$，当 $k\neq 0$ 时，以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中 $k>0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k},0)$，$(\sqrt{k},0)$，当 $k<0$ 时顶点为 $(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$.

【3154】 $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族 $(x+y)^2=a^2$，$a\geqslant 0$，当 $a=0$ 时，为直线 $x+y=0$，当 $a\neq 0$ 时与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

【3155】 $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线是以坐标原点为束心的直线束，$y=kx$，$x\neq 0$ 不包括 Oy 轴在内.

【3156】 $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族 $x^2+2y^2=a^2(a>0)$，

长半轴为 a，短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为 $\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

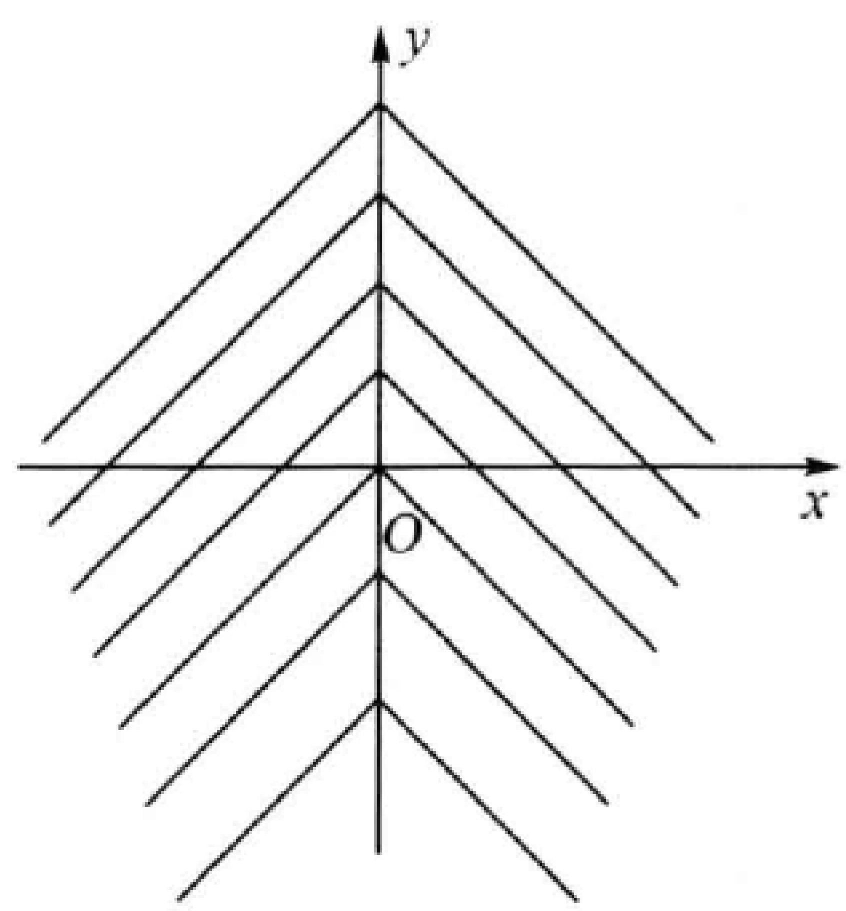
【3157】 $z=\sqrt{xy}$.

解　等位线为曲线族 $xy=a^2, a\geqslant 0$.

当 $a=0$ 时，为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$，当 $a>0$ 时，为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族，顶点为 $(-a,-a)$ 及 (a,a).

【3158】 $z=|x|+y$.

解　等位线为曲线族 $|x|+y=k$，其中 $k\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$x+y=k$，当 $x<0$ 时，$y-x=k$，这是顶点在 Oy 轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如 3158 题图所示.



3158 题图

【3159】 $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解　等位线为曲线族 $|x|+|y|-|x+y|=a$，因为 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$，于是 $a\geqslant 0$，当 $a=0$ 时，$|x|+|y|=|x+y|$，两边平方有 $xy\geqslant 0$，即为第一、第三象限，包括两坐标轴在内，当 $a>0$ 时，$xy<0$，从而有

1° $x>0, y<0, x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之有 $y=-\dfrac{a}{2}$；

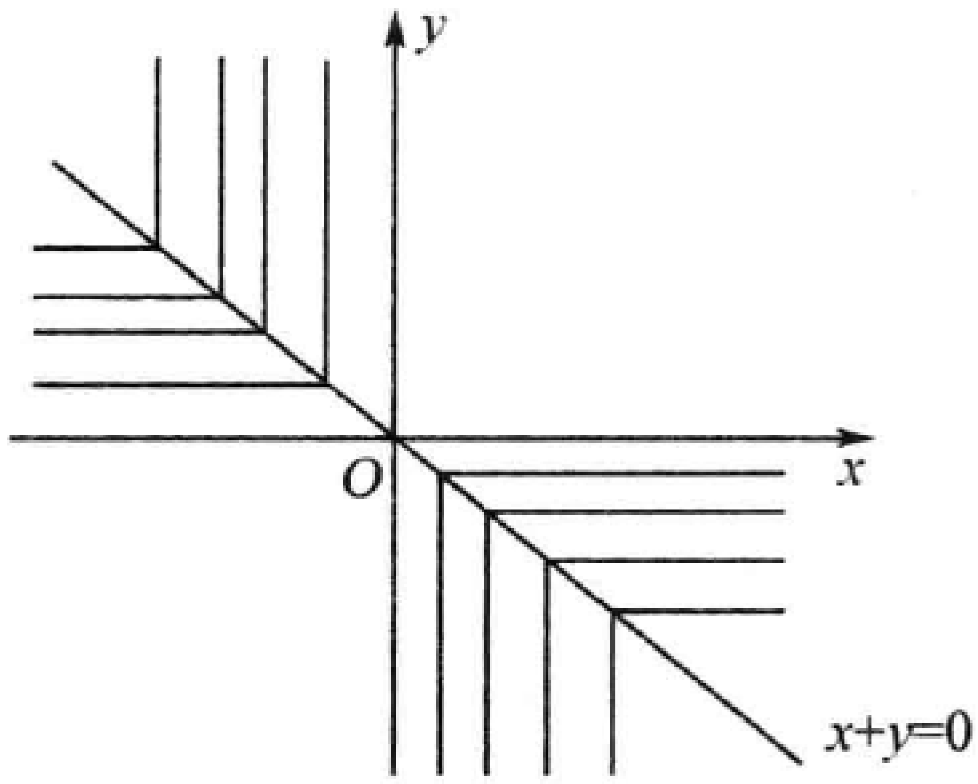
2° $x>0, y<0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之有 $x=\dfrac{a}{2}$；

3° $x<0, y>0, x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解

之有 $x=-\dfrac{a}{2}$;

4° $x<0, y>0, x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之有 $y=\dfrac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族,它的各折线平行于坐标轴,如 3159 题图所示.

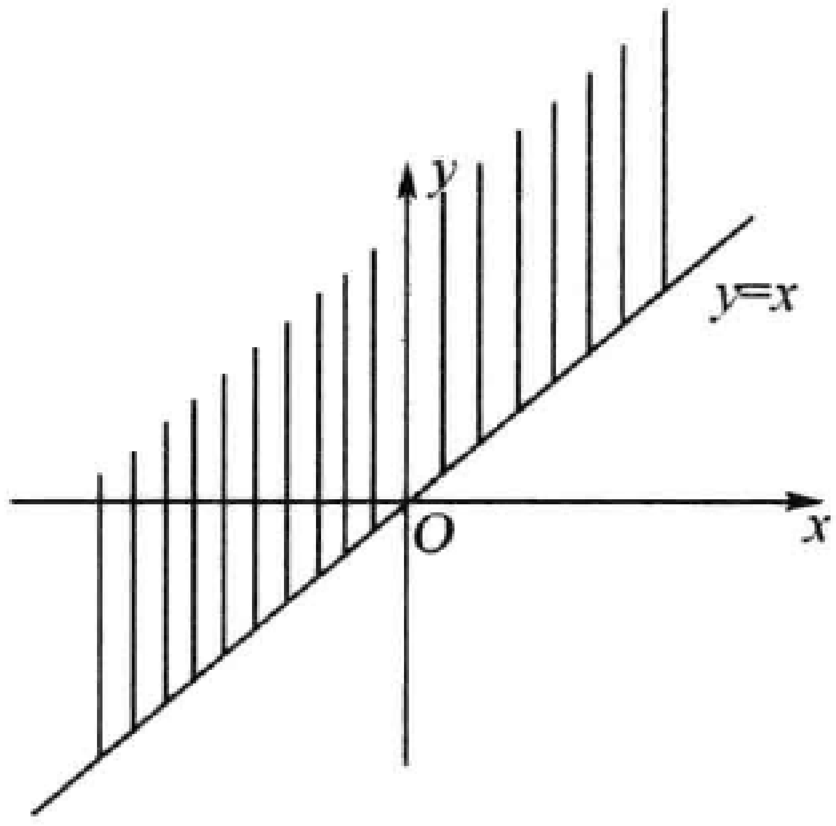


3159 题图

【3159.1】 $z=\min(x,y)$.

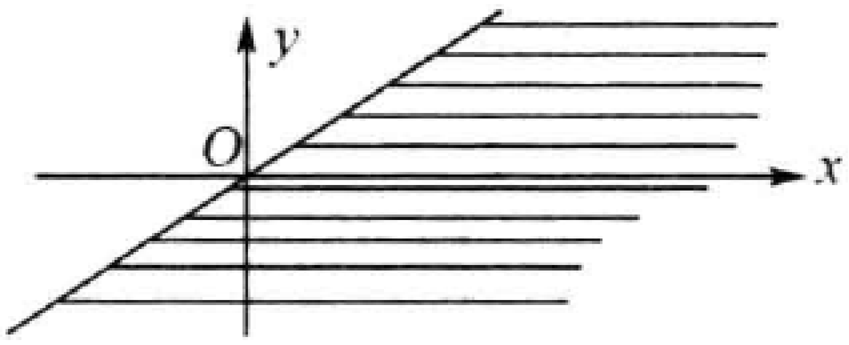
解 设 $\min(x,y)=k, k\in(-\infty,+\infty)$

则 1° 若 $y\geqslant x$,有 $x=k$,等位线是平行射线族,顶点在 $y=x$ 轴上,但含 $y=x$ 直线上点,如 3159.1 题图(1)



3159.1 题图(1)

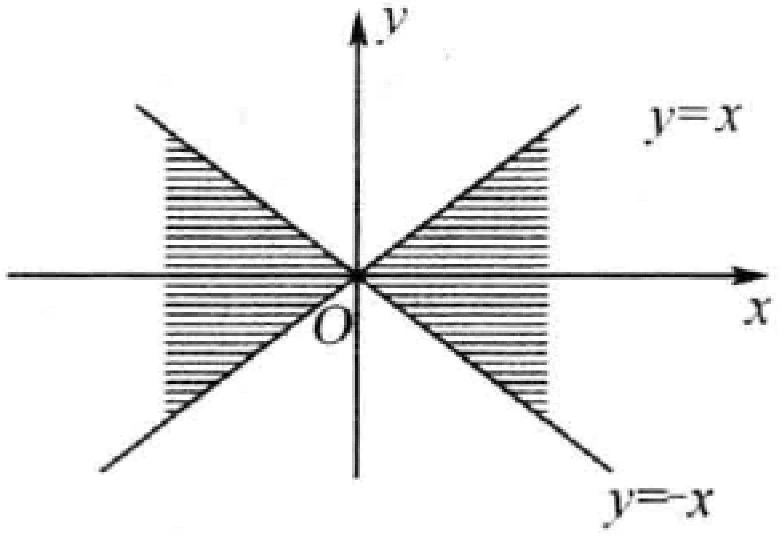
2° 若 $y < x$,有 $y = k$,等位线是平行射线族,顶点在 $y = x$ 轴上,但不含 $y = x$ 直线,如 3159 题图(2).



3159.1 题图(2)

【3159.2】 $z = \max(|x|, |y|)$.

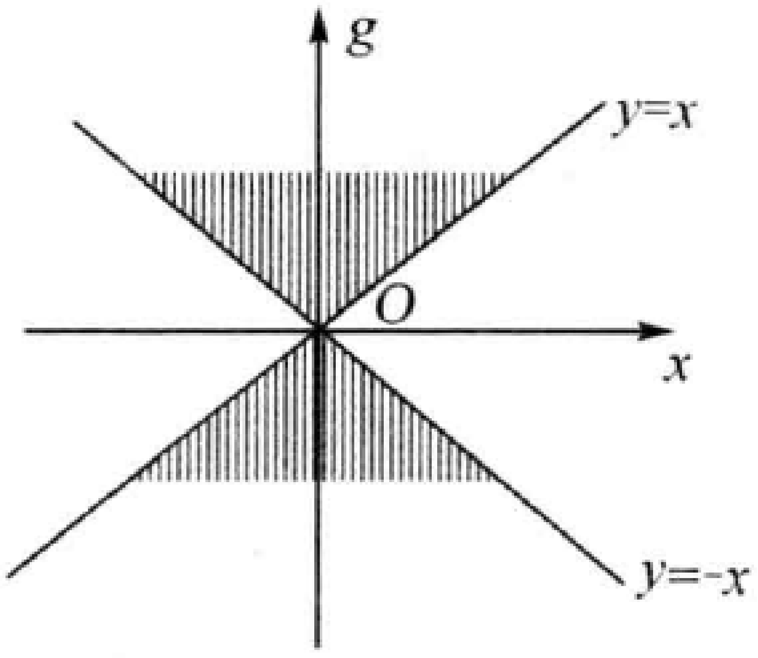
解 1° 当 $|x| \geqslant |y|$ 时,等位线 $|y| = k, k \geqslant 0$,如 3159.2 题图(1) 所示.



3159.2 题图(1)

这是一族平行的射线族,平行于 x 轴,顶点在 $y = x$ 和 $y = -x$ 直线上.

2° 当 $|y| \geqslant |x|$ 时,等位线为 $|x| = k, k \geqslant 0$,如 3159.2 题图(2) 所示.



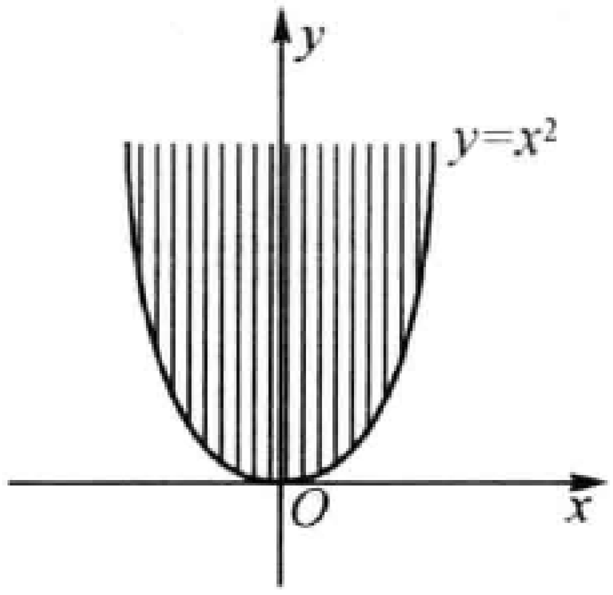
3159.2 题图(2)

这是一族平行的射线族,平行于 y 轴,顶点在 $y = x$ 和 $y =$

$-x$ 直线上.

【3159.3】 $z=\min(x^2,y)$.

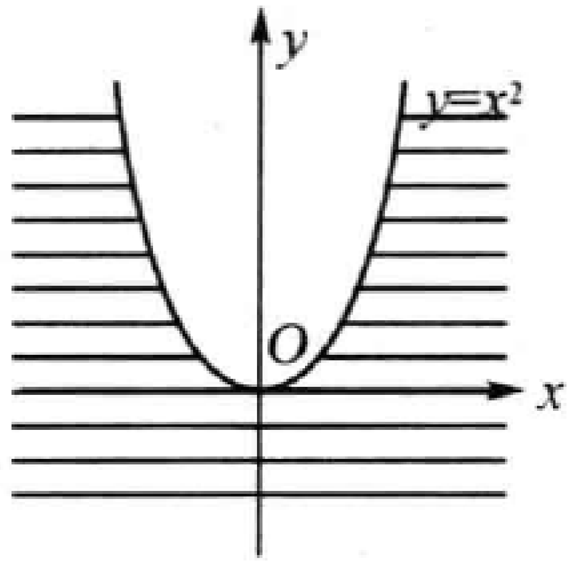
解 1° 当 $x^2\leqslant y$ 时,有 $x^2=k,k\geqslant 0$,如 3159.3 题图(1)所示



3159.3 题图(1)

等位线是一族平行于 y 轴的射线,顶点在抛物线 $y=x^2$ 上.

2° 当 $x^2\geqslant y$ 时,有 $y=k,k\in(-\infty,+\infty)$,如 3159.3 题图(2) 所示,等位线是一族平行于 x 轴的射线,顶点在抛物线 $y=x^2$ 上半曲线上和一族平行于 x 轴的直线,直线位于下半平面.



3159.3 题图(2)

【3160】 $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

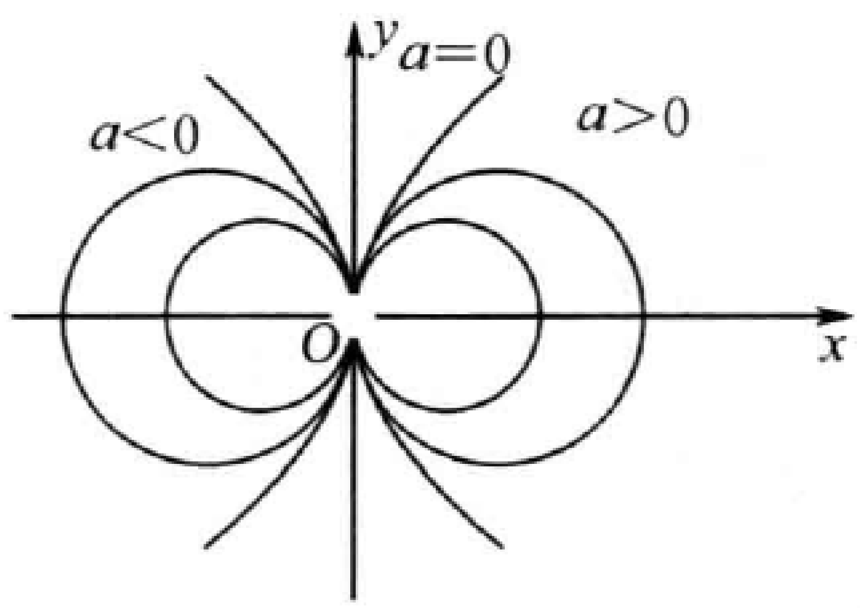
$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k,(x,y\text{ 不同时为零}),$$

其中 $k\neq 0,k\in(-\infty,+\infty)$,上式可写为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2,(k\neq 0).$$

当 $k=0$ 时,即 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$,从而等位线为 $x=0$,但不包括原点.

当 $k\neq 0$ 时,为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点(但不包括原点在内)的圆束,圆心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$,半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$,如 3160 题图所示.



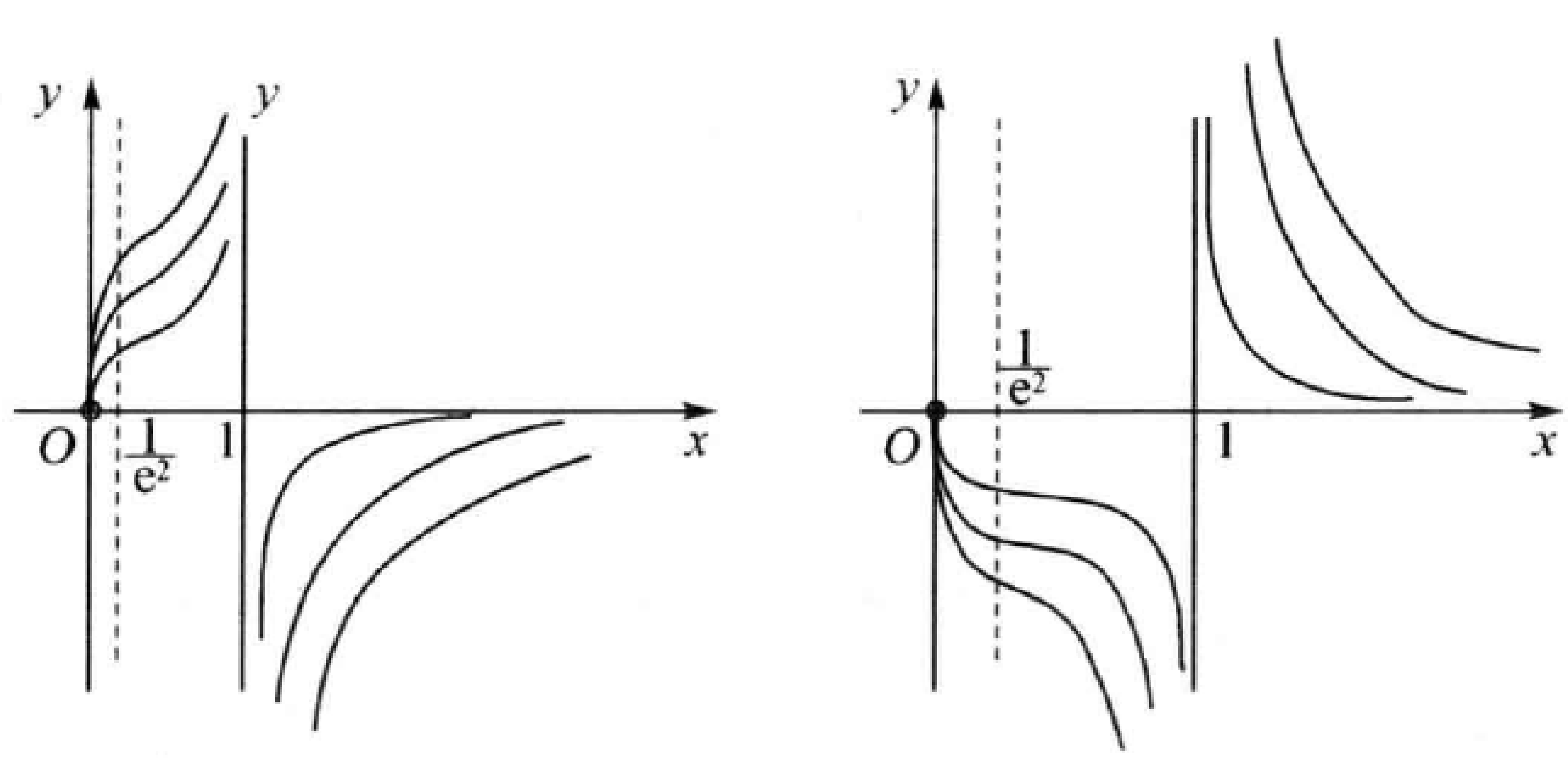
3160 题图

【3161】 $z=x^y$　$(x>0)$.

解　等位线为曲线族 $x^y=k$　$(k>0)$.

当 $k=1$ 时,为直线 $x=1$ 及 Ox 轴的正向半射线,但不包括原点在内.

当 $0<k<1$ 与 $k>1$ 时的图象如 3161 题图所示.



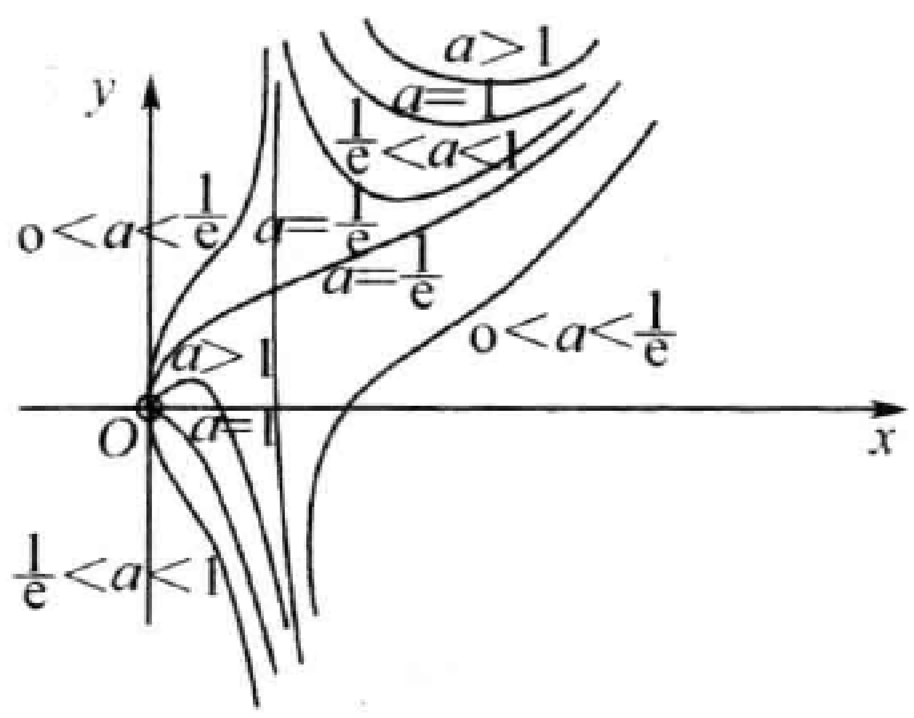
3161 题图

【3162】 $z=x^y e^{-x}$　$(x>0)$.

解　等位线为曲线族 $x^y e^{-x}=a$　$(a>0)$.

于是 $y\ln x - x = \ln a$，当 $a = e^{-1}$ 时，为直线 $x = 1$ 和曲线 $y = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

当 $0 < a < \dfrac{1}{e}$，$\dfrac{1}{e} < a < 1$ 或 $a \geqslant 1$ 时，图象布满整个右半平面，如 3162 题图所示，不包括 Oy 轴.



3162 题图

【3163】 $z = \ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} = k^2, (k>0).$$

于是有 $(1-k)^2x^2 - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0$.

当 $k = 1$ 时，有 $x = 0$，即为 Oy 轴，当 $k \neq 1$ 时，上述方程可变形为

$$\left[x - \frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

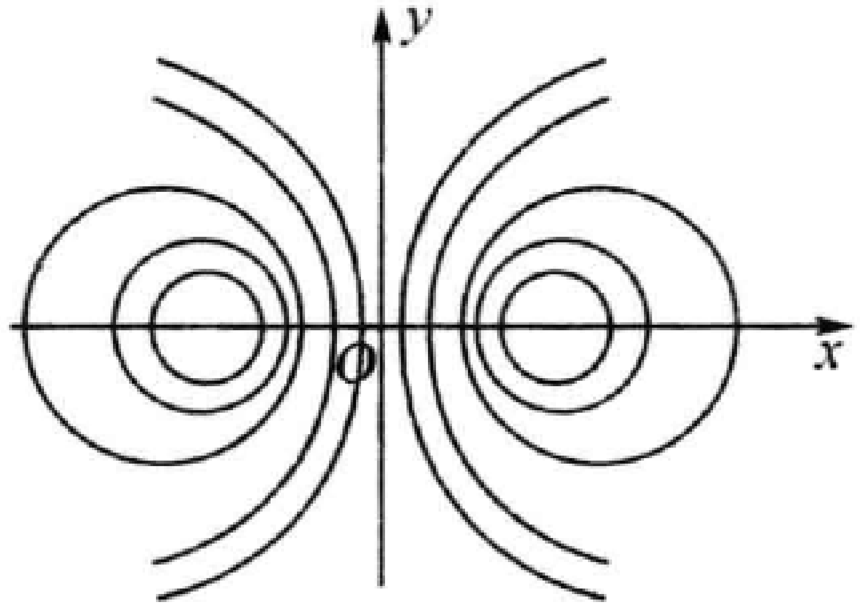
它是以点 $\left(\dfrac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0\right)$ 为圆心，半径为 $\left|\dfrac{2ak}{1-k^2}\right|$ 的圆族，当 $0 < k < 1$ 时，圆分布在右半平面，当 $k > 1$ 时，圆分布在右半平面.

又圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2 = \frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$= a^2 + \left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2.$$

即等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在交点处的半径互相垂直(或圆心距与两圆的半径构成直角三角形),于是等位线圆族与圆 $x^2+y^2=a^2$ 成正交,如 3163 题图所示.



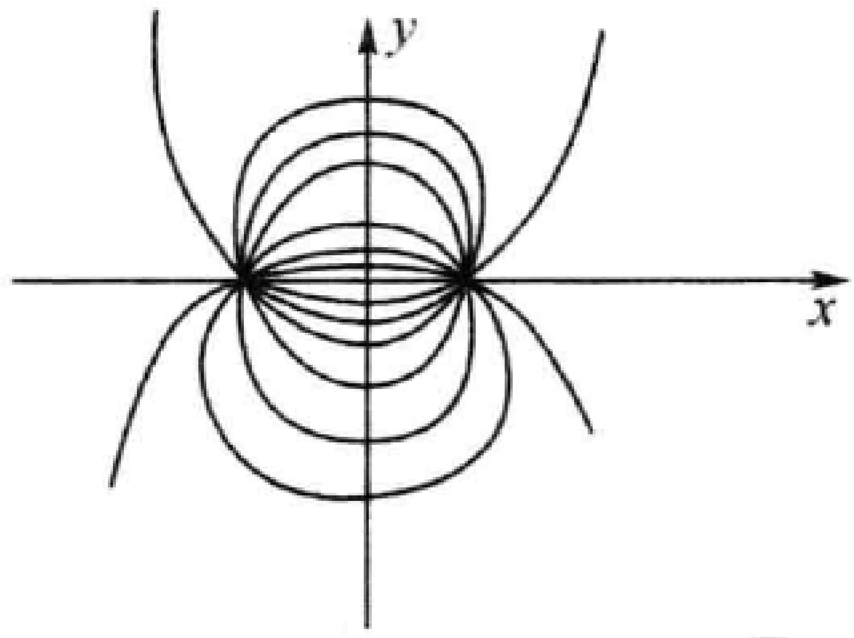
3163 题图

【3164】 $z=\arctan\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\quad(a>0)$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}=k,k\in(-\infty,+\infty).$$

但除去点$(\pm a,0)$,当 $k=0$ 时,$y=0$ 为 Ox 轴,但不包含$(\pm a,0)$ 两点,当 $k\neq 0$ 时,方程可写为 $x^2+\left(y-\dfrac{a}{k}\right)^2=a^2\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$,这是圆心在 Oy 轴上且经过点$(-a,0)$及$(a,0)$,但不包括这两点在内的圆族,如 3164 题图所示.



3164 题图

【3165】 $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

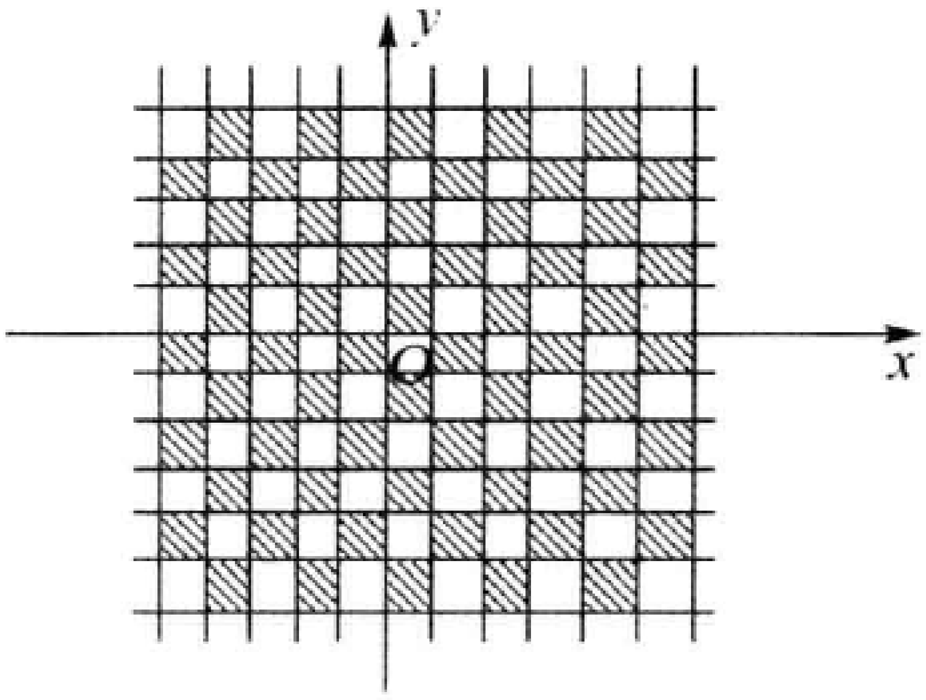
解 若 $z = 0$,则 $\sin x \cdot \sin y = 0$,即直线族 $x = m\pi$ 和 $y = n\pi, m, n \in \mathbf{Z}$.

若 $z = -1$,或 $z = 1$,则 $\sin x \sin y < 0$ 或 $\sin x \sin y > 0$,也就是

$$m\pi < x < (m+1)\pi, n\pi < y < (n+1)\pi,$$

其中 $z = (-1)^{m+n}, m, n \in \mathbf{Z}$,

即为正方形族,如3165题图所示,$z = 0$ 时为图中网格直线,$z = 1$ 为图中带斜线的正方形,$z = -1$ 为图中空白正方形,但后两者都不包括号边界.



3165 题图

求下列函数的等位面(3166 ~ 3170).

【3166】 $u = x + y + z$.

解 等位面为平行平面族

$$x + y + z = k, k \in (-\infty, +\infty).$$

【3167】 $u = x^2 + y^2 + z^2$.

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a \geqslant 0).$$

当 $a = 0$ 时,即为原点.

【3168】 $u = x^2 + y^2 - z^2$.

解 当 $u = 0$ 时,等位面为圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,当 $u > 0$ 时,等位面为单叶双曲面族 $x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \quad (a > 0)$,当 $u < 0$ 时等位面为双叶双曲面族

$$-x^2 - y^2 + z^2 = a^2, (a > 0).$$

【3169】 $u=(x+y)^2+z^2$.

解　等位面为曲面族

$$(x+y)^2+z^2=a^2,(a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时，为 $x+y=0$ 和 $z=0$，当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z. \end{cases}$$

（旋转变换）

在新坐标系中原等位面方程化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1.$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a（z' 轴方向），短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$（x' 轴方向）.

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为 $\begin{cases} x'=0, \\ z'=0. \end{cases}$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程 $\begin{cases} x+y=0, \\ z=0. \end{cases}$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴.

【3170】 $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解　当 $u=0$ 时，等位面为球心在原点的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=n\pi, n\in\mathbf{N},$$

当 $u=-1$ 或 $u=1$ 时等位面为球层族

$$n\pi < x^2 + y^2 + z^2 < (n+1)\pi, n \in \mathbf{N},$$

其中 $u = (-1)^n$.

根据所给定的方程,研究其曲面的性质(3171 ~ 3174).

【3171】 $z = f(y - ax)$.

解 引入参数 t, s,则曲面方程为$\begin{cases} x = t, \\ y = at + s, \\ z = f(s). \end{cases}$

现固定 s,则得 t 为参数的直线方程,其方向数为$(1, a, 0)$. 于是,曲面以$(1, a, 0)$ 为母线方向的一个柱面,令 $t = 0$,有

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = s, \\ z = f(s). \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 0, \\ z = f(y). \end{cases}$$

这是 $x = 0$ 平面上的一条曲线,也是柱面 $z = f(y - ax)$ 的一条准线.

【3172】 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 令 $y = 0$,有$\begin{cases} y = 0, \\ z = f(x), (x \geqslant 0). \end{cases}$是旋转曲面的一条母线.

【3173】 $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解 令 $x = t, \dfrac{y}{x} = s$,有$\begin{cases} x = t, \\ y = st, (t \neq 0), \\ z = tf(s). \end{cases}$

现固定 s,这是以 t 为参数的一条过原点的直线,因此,所给曲面为顶点在原点的一锥面,但不包括原点在内,令 $t = 1$,有

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = s, \\ z = f(s). \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 1, \\ z = f(y). \end{cases}$$

这是 $x = 1$ 平面上的一条曲线,也是锥面 $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$的一条准线.

【3174】 $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解 令 $x = t, s = \dfrac{y}{x}$,有$\begin{cases} x = t, \\ y = st, \\ z = f(s). \end{cases}$

现固定 s,这是一条过点$(0,0,f(s))$的直线,方向数为 $1,s,0$,因此,它与 Oz 轴垂直,与 Oxy 平面平行,且其方向与 s 有关,于是曲面 $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$表示一个直纹面,一般地,它既不是柱面,又不是锥面,令 $t = 1$,则一条直纹面的准线是$\begin{cases} x = 1, \\ z = f(y). \end{cases}$

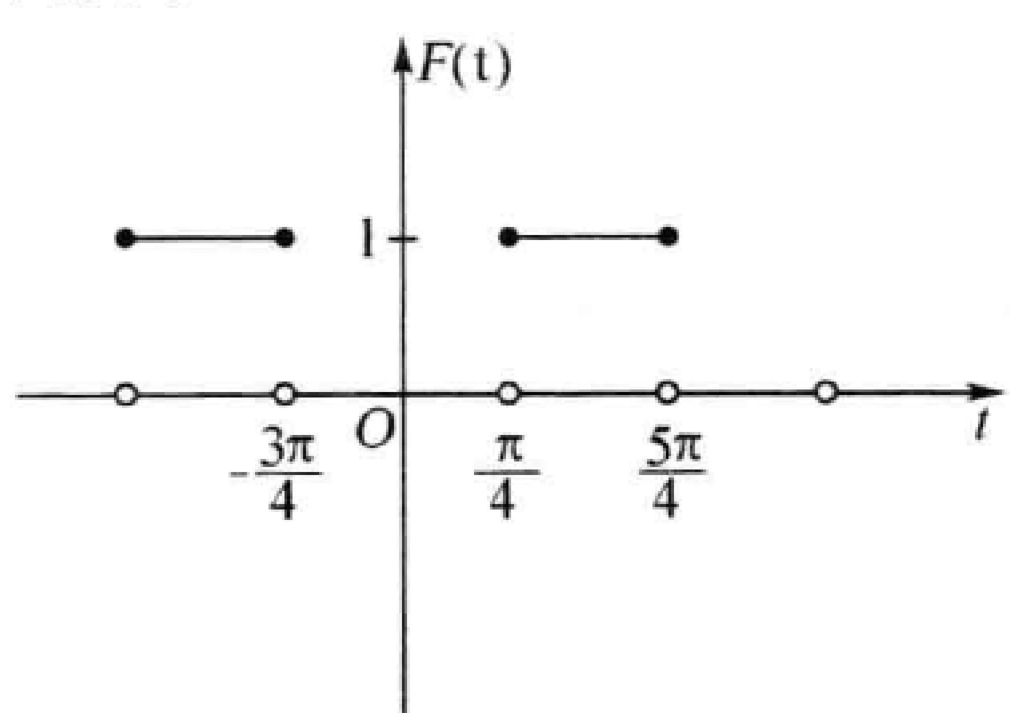
因此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直且相交的直线,这样的直线的全体,便构成由 $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$所表示的直纹面.

【3175】 作出下列函数的图形:

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

其中 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 若\ y \geqslant x, \\ 0, & 若\ y < x. \end{cases}$

解 当 $\sin t \geqslant \cos t$,即$\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant t \leqslant \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$时,$F(t) = 1$,当 $\sin t < \cos t$,即$-\dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi < t < \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时,$F(t) = 0$,如 3175 题图所示.



3175 题图

【3176】 若 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

解 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{2\cdot 1\cdot\dfrac{y}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

【3177】 若 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}(x>0)$,求函数 $f(x)$.

解 由 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$,有 $\qquad f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

【3178】 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$.

当 $y=1$ 时,若 $z=x$,确定函数 f 和 z.

解 由 $y=1$ 时,$z=x$,有

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$$
$$=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2].$$

于是 $\qquad f(t)=t(t+2)=t^2+2t$.

从而 $\qquad z=\sqrt{y}+x-1,x>0$.

【3179】 设 $z=x+y+f(x-y)$.

当 $y=0$ 时,若 $z=x^2$,求出函数 f 和 z.

解 由 $y=0$ 时,$z=x^2$,有

$$x^2=x+f(x),$$

即 $\qquad f(x)=x^2-x$.

于是 $\qquad z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2$.

【3180】 若 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求函数 $f(x,y)$.

解 由 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$$

知 $$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

【3181】 证明:对于函数:

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y},$$

具有 $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}=1,\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}=-1,$

因此不存在$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$.

证 $$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0}f(x,y)\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0}f(x,y)\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1.$$

由于累次极限不等,于是$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

【3182】 证明:对于函数:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

具有 $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}=\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}=0,$

然而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

证 $$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0}f(x,y)\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim_{x\to0}0=0,$$

$$\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0}f(x,y)\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim_{y\to0}0=0,$$

现按 $y=kx$ 方向的极限,即

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2},$$

若 $k=0$ 时,则该极限为 0,若 $k=1$ 时,该极限为 1,因此,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

【3183】 证明:对于函数:

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

两个累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\}$ 不存在,然而存在 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

证 由

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$

知 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0,$$

而当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$, $y\to 0$ 时,$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 极限不存在,因此累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\}$ 不存在,同法可证累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\}$ 不存在.

【3183.1】 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

证 沿 $y=kx$ 方向,令 $x\to 0$ 时极限为

$$\lim_{\substack{y\to kx\\ x\to 0}}\frac{2kx^2}{(k^2+1)x^2}=\frac{2k^2}{k^2+1},$$

于是当 k 为不同值时,该极限值不同,从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

【3183.2】 当 $t\to+\infty$ 时,沿着任意射线:

$$x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha\qquad(0\leqslant t<+\infty)$$

函数的极限 $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$ 等于什么?

当 $x\to\infty$ 及 $y\to\infty$ 时,这个函数可以称为无穷小吗?

解 由

$$x=t\cos\alpha, y=t\sin t,$$

有 $$f(x,y)=t^2\cos^2\alpha\mathrm{e}^{-(t^2\cos^2\alpha-t\sin\alpha)}=\frac{t^2\cos^2\alpha}{\mathrm{e}^{t^2\cos^2\alpha}}\cdot\mathrm{e}^{t\sin\alpha},$$

所以

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2\cos^2\alpha}{e^{t^2\cos^2\alpha}}\cdot e^{t\sin\alpha}=\begin{cases}0,\sin\alpha>0,\\0,0<\sin\alpha<1,\\0,\sin\alpha=1,\\0,-1<\sin\alpha<0,\\0,\sin\alpha=-1.\end{cases}$$

于是　$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$

又　$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2+y}=0\cdot e^y=0$

于是当 $x\to\infty$ 时,为无穷小量.

又 $\lim\limits_{y\to\infty}x^2e^{-x^2}e^y=+\infty,(x\neq0)$,于是当 $y\to\infty$ 时,不是无穷小量.

【3184】 若:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4},a=\infty,b=\infty$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y},a=\infty,b=+0$;

(3) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y},a=\infty,b=\infty$;

(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy},a=0,b=\infty$;

(5) $f(x,y)=\log_x(x+y),a=1,b=0$.

求 $\lim\limits_{x\to a}\{\lim\limits_{y\to b}f(x,y)\}$ 和 $\lim\limits_{y\to b}\{\lim\limits_{x\to a}f(x,y)\}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}0=0$,

$$\lim_{y\to\infty}\{\lim_{x\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}=\lim_{y\to\infty}1=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\{\lim\limits_{y\to+0}f(x,y)\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{y\to+0}\{\lim_{x\to+\infty}f(x,y)\}=\lim_{y\to+0}\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim_{y\to+0}1=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}0=0$,

$$\lim_{y\to\infty}\{\lim_{x\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right\}=\lim_{y\to\infty}1=1.$$

(4) $$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to\infty}f(x,y)\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+yx}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\cdot\lim_{y\to\infty}\tan\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\{0\cdot\tan1\}=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\{\lim_{x\to0}f(x,y)\}=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left\{\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+xy}\right\}$$

$$=\lim_{y\to\infty}1=1.$$

(5) $$\lim_{x\to1}\{\lim_{y\to0}f(x,y)\}=\lim_{x\to1}\{\lim_{y\to0}\log_x(x+y)\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\lim_{y\to0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to1}f(x,y)\}=\lim_{y\to0}\left\{\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right\}=\infty.$$

求下列二重极限(3185 ~ 3193).

【3185】 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 由

$$2|xy|\leqslant x^2+y^2,$$

有
$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}$$

$$\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

又
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0,$$

有
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

【3186】 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 由

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right),$$

而 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0,$$

知有 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

【3187】 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=a.$$

【3188】 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[\frac{(x+y)^2}{\mathrm{e}^{x+y}}-2\frac{x}{\mathrm{e}^x}\cdot\frac{y}{\mathrm{e}^y}\right]=0.$$

【3189】 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 由

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

且 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0,$$

有 $$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

【3190】 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 由

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|,$$

又 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim_{s\to+0}\frac{1}{4}s^2\ln s=0,$$

于是 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$$

【3191】 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{(x+y)}}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$$
$$=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}e^{\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\frac{x}{x+y}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}}=e^{1\cdot 1}=e.$$

【3192】 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{1}=\ln 2.$$

【3193】 若 $x=\rho\cos\varphi$ 及 $y=\rho\sin\varphi$,则沿什么方向角 φ 存在有穷极限?

(1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{(x^2+y^2)}}$;

(2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

解 (1) 由

$$\lim_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to+0}e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}=\begin{cases}0, & \cos\varphi<0,\\ 1, & \cos\varphi=0,\\ +\infty, & \cos\varphi>0.\end{cases}$$

知当 $\cos\varphi\leqslant 0$,即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时,所给的极限存在.

(2) 由
$$e^{x^2-y^2}\sin 2xy=e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi),$$

又当 $\rho\to+\infty$ 时,$\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ 有界,除 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{N}$ 外无极限,

且

$$\lim_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi}=\begin{cases}0, & \cos 2\varphi<0,\\ 1, & \cos 2\varphi=0,\\ +\infty, & \cos 2\varphi>0.\end{cases}$$

于是当 $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$ 以及 $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ 时才有极限.

求下列函数的不连续点(3194 ~ 3201).

【3194】 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　由题意,当 $(x,y)=(0,0)$ 时,无意义,于是该函数在 $(0,0)$ 处不连续.

【3195】 $u=\frac{xy}{x+y}$.

解　直线 $x+y=0$ 上的点皆为该函数的不连续点.

【3196】 $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解　设 $a\neq 0$, $a\in\mathbf{R}$,由

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2},$$

知对直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点皆为可去的不连续点,原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点.

【3197】 $u=\sin\frac{1}{xy}$.

解　$xy=0$ 上的一切点,也就是两坐标轴上的各点皆为该函数的不连续点.

【3198】 $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

解　直线 $x=m\pi$ 和 $y=n\pi$ $(m,n\in\mathbf{Z})$ 上的各点均为该函数的不连续点.

【3199】 $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

解　圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点皆是该函数的不连续点.

【3200】 $u=\dfrac{1}{xyz}$.

解　坐标面 $x=0,y=0,z=0$ 上各点皆为该函数的不连续点.

【3201】 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

解　点 (a,b,c) 为该函数的不连续点.

【3202】 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & 若\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & 若\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

分别对于每一个变量 x 或 y(当另一个变量的值固定时)是连续的,但对这两个变量的总体是不连续的.

证　先固定 $y=a\neq 0$,则关于 x 的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

即 $g(x)=\dfrac{2ax}{x^2+a^2}\quad(x\in(-\infty,+\infty))$,它是有理函数,又当 $y=0$ 时,$f(x,0)=0$. 于是,当 y 固定时,函数 $f(x,y)$ 关于 x 是连续的,同理,当 x 固定时,函数 $f(x,y)$ 关于 y 是连续的,作为二元函数,$f(x,y)$ 在除去 $(0,0)$ 外各点皆连续,但在点 $(0,0)$ 处不连续,事实上,当 $P(x,y)$ 沿射线 $y=kx$ 趋于原点时,有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 得不同的极限值,从而有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在,于是函数 $f(x,y)$ 在原点不连续.

【3203】 证明:函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & 若\ x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在 $O(0,0)$ 点上沿着每一过该点的射线

$$x = t\cos\alpha, y = t\sin\alpha \qquad (0 \leqslant t < +\infty)$$

是连续的，亦即存在：

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,0)$$

但是，这个函数在 $(0,0)$ 点上是不连续的.

证 当 $\sin\alpha = 0$ 时，$\cos\alpha = 1$ 或 -1，于是，当 $t \neq 0$ 时，

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t^2 \cdot 0}{t^2 + 0} = 0,$$

又 $\qquad f(0,0) = 0,$

于是 $\qquad \lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,0).$

当 $\sin\alpha \neq 0$ 时，有

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} = 0,$$

于是 $\qquad \lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,0).$

现设 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y = x^2$ 趋于原点有

$$\lim_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

因此，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

【3203.1】 研究线性函数 $u = 2x - 3y + 5$ 在平面 $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ 上的一致连续性.

解 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$，

由 $\quad |u(x_1,y_1) - u(x_2,y_2)|$

$$= |2x_1 - 3y_1 + 5 - 2x_2 + 3y_2 - 5|$$

$$= |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)|$$

$$\leqslant 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|,$$

知，对任意的 $\varepsilon > 0$. 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$，$|y_1 - y_2| < \delta$ 时有

$$|u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2)|<2\delta+3\delta=5\delta=\varepsilon,$$

于是 $u(x,y)=2x-3y+5$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.

【3203.2】 研究函数 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $E^2=\{|x|<+\infty,|y|<+\infty\}$上的一致连续性.

解 由

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|\\&=\left|\frac{x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right|\\&\leqslant\frac{|x_1+x_2||x_1-x_2|+|y_1+y_2||y_1-y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\\&\leqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,\end{aligned}$$

(x_1,x_2,y_1,y_2 皆不同时为零).

又若$(x_2,y_2)=(0,0)$,显然

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\leqslant|x_1|+|y_1|=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,$$

于是我们有

$$\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|\leqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

因此,对任意的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,当 $|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$ 时有

$$|u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2)|=\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|<\varepsilon$$

成立.故 $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在IR^2 上一致连续.

【3203.3】 函数 $f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ 在域 $x^2+y^2<1$ 内是一致连续的吗?

解 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 内不一致连续,取 $\varepsilon_0\in(0,1)$,对任意 $\delta>0$,取

$$n_1=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1,n_2=\left[\frac{1}{\delta}\right]+\frac{3}{2},$$

令 $1-x_{n_1}^2-y_{n_1}^2=\frac{1}{n_1},1-x_{n_2}^2-y_{n_2}^2=\frac{1}{n_2},$

且 $\quad y_{n_1}=y_{n_2}$,

有 $\quad |x_{n_1}-x_{n_2}|=\dfrac{1}{2n_2n_1}<\delta.$

而
$$\left|\sin\frac{\pi}{1-x_{n_1}^2-y_{n_1}^2}-\sin\frac{\pi}{1-x_{n_2}^2-y_{n_2}^2}\right|$$
$$=\left|\sin\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi-\sin\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+\frac{3}{2}\right)\pi\right|=1>\varepsilon_0.$$

于是该函数在$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$上不一致连续.

【3203.4】 函数$u=\arcsin\dfrac{x}{y}$在其定义域E内是连续的吗?在域E内是一致连续的吗?

解 定义域为$\{(x,y)\mid |y|\geqslant|x|,y\neq0\}=E$,这是初等函数,显然连续但不一致连续.

取 $\varepsilon_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$,对任意的$\delta>0$,

令 $x_1=\delta,y_1=2\delta,x_2=\delta,y_2=\delta$,

有 $\quad |x_1-x_2|=0<\delta,\ |y_1-y_2|=\delta$,

而
$$\left|\arcsin\frac{x_1}{y_1}-\arcsin\frac{x_2}{y_2}\right|=\left|\arcsin1-\arcsin\frac{1}{2}\right|$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}>\varepsilon_0.$$

于是$\arcsin\dfrac{x}{y}$在E上不一致连续.

【3204】 若$y\neq0$时$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$,及$f(x,0)=0$,证明:该函数的不连续点集不是封闭的.

证 当$y_0\neq0$时,函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)显见是连续的,即$f(x,y)$在除去Ox轴以外的一切点均连续,又$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$,于是$f(x,y)$在原点连续.设$x_0\neq0$,由$\lim\limits_{y\to0}f(x_0,y)=\lim\limits_{y\to0}x_0\sin\dfrac{1}{y}$不存在,于是$f(x,y)$在点$(x_0,0)$处不连续,综上所述,$f(x,y)$的全部不连续点为$Ox$轴上除去原

点外的一切点,而原点是不连续点集合的一个聚点,但它本身却不是 $f(x,y)$ 的不连续点. 因此,$f(x,y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

【3205】 证明:若函数 $f(x,y)$ 在某个域 G 内对变量 x 是连续的,而 x 对变量 y 是一致连续的;则这个函数在所研究域内是连续的.

证 任取 $P_0(x_0,y_0)\in G$,因为 $f(x,y)$ 关于 x 对变量 y 一致连续,故对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$,当 $(x,y')\in G$,$(x,y'')\in G$,且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 是连续的,故对上述的 ε,存在 $\delta_2>0$.

当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现取 $0<\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 且使 (x_0,y_0) 的 δ 邻域 $\bigcup(x_0,y_0)$ 全部包含在区域 G 内,则当 $P(x,y)\in U(x_0,y_0)$,即 $|PP_0|<\delta$ 时,$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2$,$|y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1$,从而有

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,x_0)-f(x_0,y_0)|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此,$f(x,y)$ 在点 P_0 连续,由 P_0 的任意性知,函数 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的.

【3206】 证明:若函数 $f(x,y)$ 在某个域 G 内对变量 x 是连续的,并且对于变量 y 满足李普希茨条件,亦即:

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y')\in G$,$(x,y'')\in G$,而 L 为常数,则这个函数在该域内是连续的.

证 由 $f(x,y)$ 在 G 内满足对 y 的李普希兹条件,知 $f(x,y)$

在 G 内关于 x 对变量 y 是一致连续的,因此,由 3205 题结论知,$f(x,y)$ 在 G 内是连续的.

【3207】　证明:若函数 $f(x,y)$(这里 $(x,y)\in E$)分别对每一个变量 x 和 y 是连续的,而且对其中一个是单调的,则这个函数在域 E 内对两个变量的总体是连续的(尤戈定理).

证　不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的,设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点,由 $f(x,y)$ 关于 x 连续,有对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,当 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$ 时,有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 和 $(x_0+\delta_1,y_0)$,因为 $f(x,y)$ 关于 y 连续,于是对上述的 ε,存在 $\delta_2>0$,当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

和

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时,由 $f(x,y)$ 关于 x 单调,记

$$\Delta x=x-x_0,\qquad \Delta y=y-y_0,$$

有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant{}&\max\{|f(x_0+\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,\\ &\quad|f(x_0-\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant{}&|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|\\ &\quad+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ <{}&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

于是当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是连续的,由 (x_0,y_0) 的任意性有 $f(x,y)$

在 G 内是二元连续的.

【3208】 设函数 $f(x,y)$ 在域 $a\leqslant x\leqslant A,b\leqslant y\leqslant B$ 上是连续的,而函数序列 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛,并且满足条件 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$,证明:函数序列 $F_n(x)=f(x,\varphi_n(x))(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上也一致收敛.

证 由 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$ 知,$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$ 有意义,又因为 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant A,b\leqslant y\leqslant B$ 上连续,故 $f(x,y)$ 在 $E=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant A,b\leqslant y\leqslant B\}$ 是一致连续. 于是
对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $(x_1,y_1)\in E,(x_2,y_2)\in E$,且 $|x_1-x_2|<\delta,|y_1-y_2|<\delta$ 时,有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$,特别地,当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时,对一切 $x\in[a,A]$,皆有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon.$$

对上述的 $\delta>0$,由 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛知,存在 $N>0$,当 $m>N,n>N$ 时,对所有 $x\in[a,b]$,皆有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是,任意 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $m>N,n>N$ 时,对所有 $x\in[a,b]$,皆有

$$|F_n(x)-F_m(x)|=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此,$F_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛.

【3209】 设(1) 函数 $f(x,y)$ 在域 $R(a<x<A;b<y<B)$ 内是连续的,(2) 函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a,A) 是连续的并具有属于区间 (b,B) 内的值,证明:函数 $F(x)=f(x,\varphi(x))$ 在 (a,A) 内是连续的.

证 任取 $(x_0,y_0)\in R$,由于 $f(x,y)$ 在 R 中连续,于是对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时,有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$,又 $\varphi(x)$ 在 (a,A) 上连续,对上述的 $\delta>0$,存在 $\eta>0$,当 $|x-x_0|<\eta$ 时,有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta.$$

于是 $$|f[x,\varphi(x)]-f[x_0,\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即 $$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，$F(x)$ 在点 x_0 处连续，由 x_0 的任意性知函数 $F(x)$ 在(a,A)内连续.

【3210】 设：(1) 函数 $f(x,y)$ 在域 $R(a<x<A;b<y<B)$ 内是连续的，(2) 函数 $x=\varphi(u,v)$ 和 $y=\psi(u,v)$ 在域 $R'(a'<u<A';b'<v<B')$ 内是连续的并且分别具有属于对应区间(a,A) 和(b,B) 的值，证明函数：$F(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 在域 R' 内是连续的.

证 不妨设δ,η足够小，使点的δ邻域和点的η邻域皆在所给的区域内，任取$(x_0,y_0)\in R$，由 $f(x,y)$ 在 R 内连续知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，有
$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

又由 φ 及 ψ 的连续性知，对上述δ，存在 $\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$ 时，有

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,$$

其中 $\quad x_0=\varphi(u_0,v_0),y_0=\psi(u_0,v_0)$.

于是 $\quad$ 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$，$|v-v_0|<\eta$ 时有

$$|f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)]|<\varepsilon,$$

即 $\quad |F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon$.

因此，$F(u,v)$ 在点(u_0,v_0) 连续，由(u_0,v_0) 的任意性知，函数 $F(u,v)$ 在 R' 内连续.

§2. 偏导函数　多元函数的微分

1. **偏导数** 若所讨论的多元函数的所有偏导函数是连续的，则微分的结果与微分的次序无关.

2. **函数的微分** 若自变量 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$ 的全增量可以写成：

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

其中，系数 A,B,C 与 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 无关，

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

则函数 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 点上称为是可微分的，而增量的线性主部 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 等于

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y,z) = {} & f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x + f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y \\ & + f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z, \end{aligned} \qquad ①$$

(其中 $\mathrm{d}x = \Delta x, \mathrm{d}y = \Delta y, \mathrm{d}z = \Delta z$) 称为这个函数的微分.

在变量 x, y, z 是其他自变量的一些可微函数的情况下，公式 ① 仍有其意义.

若 x, y, z 为自变量，而函数 $f(x,y,z)$ 具有到 n 阶(包括 n 阶)的连续偏导数，则对于高阶微分，有符号公式：

$$\mathrm{d}^n f(x,y,z) = \left(\mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y \frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{d}z \frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3. **复合函数的导函数** 若 $w = f(x,y,z)$ 可微分且 $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v)$，这里函数 φ, ψ, χ 可微分，则

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

对于函数 w 二阶导函数的计算，可以利用符号公式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = {} & \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \omega + \frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ & + \frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = {} & \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z}\right)\omega \\ & + \frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned}$$

其中

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, R_1 = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4. **在已知方向上的导函数** 若在空间 $Oxyz$ 中用方向余弦

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 表示 l 方向，且函数 $u = f(x,y,z)$ 可微分，则沿方向 l 的导函数按照下式计算：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

在已知点上函数的最大增速的大小与方向，用矢量即一函数的梯度来表示：

$$\mathrm{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

其大小等于

$$|\mathrm{grad}\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

【3211】　证明：

$$f'_x(x,b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)].$$

证　令 $\varphi(x) = f(x,b)$，

于是
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)] = \varphi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b) - f(x,b)}{\Delta x}$$
$$= f'_x(x,b).$$

【3212】　若

$$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x,1)$.

解　由 $f(x,1) = x$ 知，$f'_x(x,1) = 1$.

【3212.1】　若

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy},$$

求 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$. 这个函数在 $O(0,0)$ 点上可微分吗？

解　因为

$$f(x,0) = 0 = f(0,y) = f(0,0),$$

于是 $$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

从而 $$f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0).$$

又 $$\lim_{\substack{y=\beta x\\x\to0}}\frac{\sqrt[3]{x\cdot\beta x}}{\sqrt{x^2+\beta^2x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\beta}}{(1+\beta^2)\,|\,x\,|}\not\to0,$$

于是 $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

【3212.2】 函数

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3},$$

在 $O(0,0)$ 点上可微分吗?

解 由

$$f(0,0)=0,f(x,0)=x,f(0,y)=y,$$

知 $$f'_x(0,0)=1=f'_y(0,0).$$

于是对 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微的充要条件是考察

$$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

而 $$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{\text{令 }x=\rho\cos\theta}\lim_{\rho\to0}\frac{\rho[\cos^3\theta+\sin^3\theta]^{\frac{1}{3}}-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta}{\rho}$$

$$=[\cos^3\theta+\sin^3\theta]^{\frac{1}{3}}-\cos\theta-\sin\theta,$$

令 $\theta=\frac{\pi}{3}$,

则 $$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

此时上述极限为

$$\frac{\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\neq0,$$

因此 $$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq0.$$

故 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处不可微.

【3212.3】 当$x^2+y^2\neq0$时,$f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$,而$f(0,0)=0$,研究函数 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 点的可微性.

解 由 $$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

知 $$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

于是 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微的充要条件是

$$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

而 $$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\xlongequal{令t=\sqrt{x^2+y^2}}\lim_{t\to0}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}$$

$$\xlongequal{令v=\frac{1}{t}}\lim_{v\to\infty}ve^{-v^2}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微.

求下列函数的一阶和二阶偏导数(3213 ~ 3228).

【3213】 $u=x^4+y^4-4x^2y^2$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2,\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y,$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=-16xy.$$

【3214】 $u=xy+\frac{x}{y}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

【3215】 $u = \dfrac{x}{y^2}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^3}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}.$$

【3216】 $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} y^2 \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} xy \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{x(2y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【3217】 $u = x\sin(x+y)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin(x+y) + x\cos(x+y),$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x\sin(x+y).$$

【3218】 $u = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}.$

【3219】　$u=\tan\frac{x^2}{y}.$

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sec^3\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y}.$

【3220】　$u=x^y.$

解　由 $u=x^y=e^{y\ln x}$,

有　$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial u}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\ln x,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x),\ (x>0).$

【3221】　$u=\ln(x+y^2).$

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{x+y^2}-\frac{2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$

【3222】 $u=\arctan\dfrac{y}{x}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

【3223】 $u=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}(xy\neq 1)$.

解 由 776 题有

$$\arctan\frac{x+y}{1-xy}=\arctan x+\arctan y-\theta\pi,$$

其中 $\theta=0,1,-1$,于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

【3224】 $u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 由 3216 题结论有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=-\frac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]$$

$$=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\operatorname{sgn}y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2},\ (y\neq 0).$$

【3225】 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

由对称性有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【3226】 $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $u = x^z y^{-z}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z x^{z-1} y^{-z} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z x^z y^{-z-1} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z(z-1)x^{z-2}y^{-z} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-z)(-z-1)x^z y^{-z-2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{z}{x}u\right)'_y = \frac{z}{x}\left[-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\right] = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\left(\frac{z}{y}u\right)'_z = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$= -\frac{1 + z\ln\dfrac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \left(u\ln\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y} + \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$$

$$=\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\frac{x}{y}>0.$$

【3227】 $u=x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{u}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{xyz\frac{\partial u}{\partial x}-yzu}{x^2z^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\ln x}{z}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln^2 x}{z^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-y\ln x\left(\frac{z^2\frac{\partial u}{\partial z}-2uz}{z^4}\right)=\frac{yu\ln x(2z+y\ln x)}{z^4}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}\left(u+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{u(z+y\ln x)}{xz^2}$

$=-\frac{u\ln x\cdot(z+y\ln x)}{z^3}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{y}{z^2}\left(\ln x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}\right)=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xy^3}$.

【3228】 $u=x^{y^z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}=\frac{uy^z}{x}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x=zuy^{z-1}\ln x$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y=uy^z\ln x\cdot\ln y$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^z\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{uy^z(y^z-1)}{x^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z\ln x\cdot\left[y^{z-1}\frac{\partial u}{\partial y}+(z-1)y^{z-2}u\right]$$
$$=uzy^{z-2}\ln x\cdot(zy^z\ln x+z-1),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(y^z\frac{\partial u}{\partial z}+uy^z\ln y\right)\ln x\cdot\ln y$$
$$=uy^z\ln x\cdot\ln^2 y\cdot(1+y^z\ln x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left(y^z\frac{\partial u}{\partial y}+uzy^{z-1}\right)=\frac{uzy^{z-1}(y^z\ln x+1)}{x},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(y^{z-1}u+uzy^{z-1}\ln y+zy^{z-1}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ln x$$
$$=uy^{z-1}\ln x\cdot[1+z\ln y\cdot(1+y^z\ln x)],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=y^z\ln y\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ln x+\frac{u}{x}\right)=\frac{uy^z\ln y\cdot(y^z\ln x+1)}{x},$$
$$x>0,y>0.$$

【3229】 若(1) $u=x^2-2xy-3y^2$;(2) $u=x^{y^2}$;(3) $u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$. 验证等式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

证 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2y,\frac{\partial u}{\partial y}=-2x-6y,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-2,$$

故 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2x^{y^2-1},\frac{\partial u}{\partial y}=2yx^{y^2}\ln x,x>0,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yx^{y^2-1}+2y^3x^{y^2-1}\ln x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2y^3x^{y^2-1}\ln x+2yx^{y^2-1},$$

故 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

(3) 1° 当 $0<x\leqslant y$ 时,

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{-1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是,当 $0<x\leqslant y$ 时,有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

2° 当 $y\leqslant x<0$ 时

$$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^3-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}(x-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $y \leqslant x < 0$ 时，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

【3230】 设

$$f(x,y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0,$$

及 $f(0,0) = 0$，证明 $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

证 由

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{x} = -y,$$

知 $\quad f'_x(0,y) = -y,$

从而 $\quad f''_{xy}(0,0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f'_x(0,y)]\Big|_{y=0} = -1.$

同法可求得

$$f'_y(x,0) = x,$$

从而 $\quad f''_{yx}(0,0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f'_y(x,0)]\Big|_{x=0} = 1.$

于是 $\quad f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$

【3230.1】 若

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 时}; \\ 0, \text{当 } x = y = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

$f''_{xy}(0,0)$ 存在吗？

解 由

$$f(0,y) = 0 = f(x,0) = 0,$$

其中 $x \neq 0, y \neq 0$，有

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，

$$f'_x(x,y)=\frac{2y(x^2+y^2)-2xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)-2xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x[x^2-y^2]}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2y^3}{y^4}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{2}{y^2}=\infty,$$

知 $f''_{xy}(0,0)$ 不存在.

【3231】 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数,用以下例题验证关于齐次函数的欧拉定理:

(1) $u=(x-2y+3z)^2$;

(2) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(3) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

证 关于 n 次齐次函数的欧拉定理是:

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$ 在域 A 中关于所有变量皆有连续偏导数,则下述等式成立.

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)$$
$$=nf(x,y,z),$$

(1) 由

$$(tx-2ty+3tz)^2=t^2u,$$

我们有 u 是二次齐次函数,又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

于是 $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=(x-2y+3z)(2x-4y+6z)=2u,$$
即 u 满足欧拉定理.

(2) 由
$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$=t^0\cdot u,(t>0),$$
有 u 为零次齐次函数,又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
得 $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}[xy^2+xz^2-xy^2-xz^2]$$
$$=0\cdot u=0.$$
即函数 u 满足欧拉定理.

(3) 由
$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u,(t>0),$$
于是 u 为零次齐次函数,又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}})'_y\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right]$$
$$=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}} \cdot \ln\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故有　$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$

$$= x\frac{yu}{xz} + y\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right) - z\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y} = 0 = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

【3232】　证明:若可微函数 $u = f(x,y,z)$ 满足方程式

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它是 n 次齐次函数.

提示:研究辅助函数 $F(t) = \frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}$.

证　设 $t > 0$,令

$$F(t) = \frac{f(tx,ty,tz)}{t^n},$$

由复合函数的求导法则,对 t 求导有

$$F'(t) = \frac{1}{t^n}\{xf'_x(tx,ty,tz) + yf'_y(tx,ty,tz)$$

$$+ zf'_z(tx,ty,tz)\} - \frac{n}{t^{n+1}}f(tx,ty,tz)$$

$$= \frac{1}{t^{n+1}}\{txf'_x(tx,ty,tz) + tyf'_y(tx,ty,tz)$$

$$+ tzf'_z(tx,ty,tz) - nf(tx,ty,tz)\},$$

由已知条件

$$txf'_x(tx,ty,tz) + tyf'_y(tx,ty,tz) + tzf'_z(tx,ty,tz)$$

$$= nf(tx,ty,tz),$$

有　$F'(t) = 0$.

从而 $t > 0$ 时,$F(t) = C$,其中 C 为常数.

现令 $t = 1$,有

$$F(1) = \frac{f(x,y,z)}{1^n} = f(x,y,z),$$

即 $\qquad C = f(x,y,z).$

从而 $\qquad f(tx,ty,tz) = F(t)t^n = t^n f(x,y,z).$

于是 $f(x,y,z)$ 为一个 n 次的齐次函数.

【3233】 证明:若 $f(x,y,z)$ 是可微分的 n 次齐次函数,则其偏导数 $f'_x(x,y,z),f'_y(x,y,z),f'_z(x,y,z)$ 是 $n-1$ 次的齐次函数.

证 由

$$f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z),$$

两边对 x,y,z 分别求偏导数有

$$tf'_x(tx,ty,tz) = t^n f'_x(x,y,z),$$

$$tf'_y(tx,ty,tz) = t^n f'_y(x,y,z),$$

$$tf'_z(tx,ty,tz) = t^n f'_z(x,y,z),$$

于是 $\qquad f'_x(tx,ty,tz) = t^{n-1} f_x(x,y,z),$

$$f'_y(tx,ty,tz) = t^{n-1} f_y(x,y,z),$$

$$f'_z(tx,ty,tz) = t^{n-1} f_z(x,y,z).$$

故 $f'_x(x,y,z),f'_y(x,y,z),f'_z(x,y,z)$ 皆为 $n-1$ 次齐次函数.

【3234】 设 $u = f(x,y,z)$ 是可微分两次的 n 次齐次函数,证明:$\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$

证 由 3233 知,$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 皆为$(n-1)$次齐次函数,于是由欧拉定理有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad ①$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad ②$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad ③$$

将 ① 式两端乘以 x,② 式两端乘以 y,③ 式两端乘以 z,并相加有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u$$
$$=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u.$$

求解下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z 为自变量)(3235 ~ 3241).

【3235】 $u=x^m y^n$.

解 $$\mathrm{d}u=x^{m-1}y^{n-1}(my\,\mathrm{d}x+nx\,\mathrm{d}y)$$
$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=m(m-1)x^{m-2}y^n\mathrm{d}x^2+2mnx^{m-1}y^{n-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+n(n-1)x^m y^{n-2}\mathrm{d}y^2\\&=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2\mathrm{d}x^2+2mnxy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+n(n-1)x^2\mathrm{d}y^2].\end{aligned}$$

【3236】 $u=\dfrac{x}{y}$.

解 $$\mathrm{d}u=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2},$$
$$\mathrm{d}^2u=\frac{y^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)-2y\mathrm{d}y(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{y^4}$$
$$=-\frac{2}{y^3}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{d}y.$$

【3237】 $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\mathrm{d}^2u=\frac{\mathrm{d}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【3238】 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$
$$\mathrm{d}^2u=\frac{\mathrm{d}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}-\frac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}-\frac{2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

【3239】 $u=e^{xy}$.

解 $du=e^{xy}(ydx+xdy)$,

$$d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$$

$$=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2].$$

【3240】 $u=xy+yz+zx$.

解 $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,

$$d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx).$$

【3241】 $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

解 $du=-\dfrac{2z}{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)+\dfrac{dz}{x^2+y^2}$

$$=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2u=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{(x^2+y^2)^2[2(xdx+ydy)dz$$
$$-2(xdx+ydy)dz-2z(dx^2+dy^2)]$$
$$-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)[(x^2+y^2)dz$$
$$-2z(xdx+ydy)]\}$$
$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}\{2z[(3x^2-y^2)dx^2+8xydxdy$$
$$+(3y^2-x^2)dy^2]-4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz\}.$$

【3242】 若 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$,求 $df(1,1,1)$ 及 $d^2f(1,1,1)$.

解 由

$$f'_x(x,1,1)=1,f'_x(1,1,1)=1,$$

$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},f'_y(1,1,1)=-1,$$

$$f'_z(1,1,z)=0,f'_z(1,1,1)=0,$$

有　$$\mathrm{d}f(1,1,1)=f'_x(1,1,1)\mathrm{d}x+f'_y(1,1,1)\mathrm{d}y+f'_z(1,1,1)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

又　$$f'_x(x,1,1)=1,f''_{xx}(x,1,1)=0,$$
$$f''_{xx}(1,1,1)=0,$$
$$f'_x(1,y,1)=\frac{1}{y},f''_{xy}(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},$$
$$f''_{xy}(1,1,1)=-1,$$
$$f'_x(1,1,z)=\frac{1}{z},f''_{xz}(1,1,z)=-\frac{1}{z^2},$$
$$f''_{xz}(1,1,1)=-1,$$
$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},f''_{yy}(1,y,1)=\frac{2}{y^3},$$
$$f''_{yy}(1,1,1)=2,$$
$$f'_y(1,1,z)=-\frac{1}{z},f''_{yz}(1,1,z)=\frac{1}{z^2},$$
$$f''_{yz}(1,1,1)=1,$$
$$f'_z=(1,1,z)=0,f''_{zz}(1,1,z)=0,$$
$$f''_{zz}(1,1,1)=0,$$

于是　$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^2f(1,1,1)\\&=f''_{xx}(1,1,1)\mathrm{d}x^2+f''_{yy}(1,1,1)\mathrm{d}y^2+f''_{zz}(1,1,1)\mathrm{d}z^2\\&\quad+2f''_{xy}(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2f''_{yz}(1,1,1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\quad+2f''_{xz}(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=2\mathrm{d}y^2-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=2(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

【3243】　证明:若 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\mathrm{d}^2u\geqslant 0$.

证　$$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{u},$$
$$\mathrm{d}^2u=\frac{1}{u^2}[u(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)-(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)\mathrm{d}u]$$

$$= \frac{1}{u^3}[(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)^2 + (y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y)^2 + (z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)^2].$$

由 $u > 0$，知 $\mathrm{d}u \geqslant 0$.

【3244】 假定 x, y 的绝对值很小，推导下列表达式的近似公式：

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$；

(2) $\ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$；

(3) $\arctan \dfrac{x+y}{1+xy}$.

解 (1) 由

$$f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n,$$

有
$$f'_x(x,0) = m(1+x)^{m-1}, f'_x(0,0) = m,$$
$$f'_y(0,y) = n(1+y)^{n-1}, f'_y(0,0) = n,$$

于是
$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y = 1 + mx + ny.$$

从而
$$(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny.$$

(2) 由

$$f(x,y) = \ln(1+x)\ln(1+y),$$

有
$$f'_x(x,0) = 0, f'_x(0,0) = 0,$$
$$f'_y(0,y) = 0, f'_y(0,0) = 0,$$
$$f''_{xx}(x,0) = 0, f''_{xx}(0,0) = 0,$$
$$f''_{yy}(0,y) = 0, f''_{yy}(0,0) = 0,$$
$$f'_x(0,y) = \ln(1+y), f''_{xy}(0,y) = \frac{1}{1+y},$$
$$f''_{xy}(0,0) = 1.$$

于是
$$f(x,y) \approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2!}[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2] = xy.$$

从而
$$\ln(1+x) \cdot \ln(1+y) \approx xy.$$

（3）由

$$f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy},$$

有
$$f'_x(x,0)=\frac{1}{1+x^2},f'_x(0,0)=1,$$

$$f'_y(0,y)=\frac{1}{1+y^2},f'_y(0,0)=1,$$

于是
$$f(x,y)\approx f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y=x+y.$$

从而
$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

【3245】 用微分替换函数的增量，近似计算：

（1）$1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$；

（2）$\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05^3}}}$；

（3）$\sqrt{1.02^3+1.97^3}$；

（4）$\sin 29°\cdot\tan 46°$；

（5）$0.97^{1.05}$.

解　（1）设

$$f(x,y,z)=(1+x)^m(1+y)^n(1+z)^l,$$

则当 $|x|,|y|,|z|$ 很小时，有近似公式

$$f(x,y,z)\approx 1+mx+ny+lz,$$

于是
$$\begin{aligned}&1.002\times 2.003^2\times 3.004^3\\&=(1+0.002)\times 2^2\left(1+\frac{0.003}{2}\right)^2\times 3^3\left(1+\frac{0.004}{3}\right)^3\\&\approx 1\cdot 2^2\cdot 3^2\left(1+0.002+2\cdot\frac{0.003}{2}+3\cdot\frac{0.004}{3}\right)\\&=108.972.\end{aligned}$$

（2）原式 $=(1+0.03)^2\cdot(1-0.02)^{-\frac{1}{3}}(1+0.05)^{-\frac{1}{4}}$

$$\approx 1+2\times 0.03+\left(-\frac{1}{3}\right)(-0.02)+\left(-\frac{1}{4}\right)\times 0.05$$

$$\approx 1.054.$$

(3) 原式$=(1.97)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=2^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{0.03}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3}{2}\left(-\frac{0.03}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3\right]$$

$$\approx 2.958.$$

(4) 设 $f(x,y)=\sin x\tan y$,则有近似公式

$$f(x,y)\approx\sin x_0\tan y_0+\cos x_0\tan y_0\cdot(x-x_0)$$
$$+\frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0}(y-y_0).$$

现令$x_0=\frac{\pi}{6}$,$y_0=\frac{\pi}{4}$,

$$x-x_0=-\frac{\pi}{180},y-y_0=\frac{\pi}{180},$$

有
$$\sin29^\circ\tan46^\circ\approx\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$
$$+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{180}\right)$$
$$\approx 0.502.$$

(5) 设 $f(x,y)=x^y$,

由于$f'_x(1,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)\Big|_{x=1}=1$,

$$f'_y(1,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(1,y)\Big|_{y=1}=0,$$

于是 $x^y\approx x$,从而 $0.97^{1.05}\approx0.97$.

【3246】 矩形的边长 $x=6$ m,$y=8$ m. 若第一个边增加 2 mm,而第二个边减少 5 mm,问矩形的对角线和面积变化各是多少?

解 矩形面积 $S=xy$,矩形对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$,

而　$\Delta S \approx y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y, \Delta l \approx \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$，

以 $x = 6000, y = 8000, \mathrm{d}x = 2, \mathrm{d}y = -5$ 代入上式有

$$\Delta S \approx 8000 \times 2 + 6000 \times (-5)$$
$$= 14000(\text{平方毫米}) = -140(\text{平方厘米}).$$
$$\Delta l \approx \frac{6000 \times 2 + 8000 \times (-5)}{\sqrt{6000^2 + 8000^2}} \approx -2.8(\text{毫米}).$$

于是对角线减少约 3 毫米，面积减少约 140 平方厘米.

【3247】 扇形的中心角 $\alpha = 60°$，要增加 $\Delta\alpha = 1°$. 为了使扇形的面积仍然不变，扇形半径 $R = 20$ cm 应该减少多少？

解　扇形的面积

$$A = \frac{1}{2}R^2\alpha,$$

于是　$\Delta A \approx \mathrm{d}A = R\alpha\,\mathrm{d}R + \dfrac{1}{2}R^2\,\mathrm{d}\alpha.$

由 $\Delta A = 0$ 有

$$20 \times \frac{\pi}{3}\mathrm{d}R + \frac{1}{2} \times 20^2 \times \frac{\pi}{180} \approx 0,$$

于是　$\mathrm{d}R \approx -\dfrac{1}{6}(\text{厘米}) \approx -1.7(\text{毫米}).$

从而应当使半径减少约 1.7 毫米.

【3248】 证明：乘积的相对误差近似地等于乘数相对误差的和.

证　设 $u = xy$，

则　$\mathrm{d}u = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$，

从而　$\dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \dfrac{\mathrm{d}y}{y}.$

取绝对值，有

$$\left|\frac{\mathrm{d}u}{u}\right| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|.$$

上式各项皆表示该量的相对误差.

【3249】 在测量圆筒的底半径R和高度H时取得以下结果：

$$R=2.5\ \text{m}\pm 0.1\ \text{m};H=4.0\ \text{m}\pm 0.2\ \text{m}$$

在计算圆筒的容积时会有怎样的绝对误差Δ和相对误差δ?

解 体积$V=\pi R^2H$,于是

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=2\pi R\mathrm{d}R+\pi R^2\mathrm{d}H,$$

以$R=2.5,H=4.0,\mathrm{d}R=0.1,\mathrm{d}H=0.2$代入上式,有

$$\Delta V\approx 10.2\text{ 立方米},\delta_V=\left|\frac{\Delta V}{V}\right|=13\%.$$

【3250】 三角形的边$a=200\ \text{m}\pm 2\ \text{m}$, $b=300\ \text{m}\pm 5\ \text{m}$. 它们之间的角度$C=60^\circ\pm 1^\circ$. 在计算三角形的第三个边$c$时其绝对误差是多少?

解 由余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

有
$$c\mathrm{d}c=a\mathrm{d}a+b\mathrm{d}b-b\cos C\mathrm{d}a-a\cos C\mathrm{d}b+ab\sin C\mathrm{d}C,$$

令 $a=200,b=300,$

$$c=\sqrt{200^2+300^2-2\times 200\times 300\cos 60^\circ},$$

$$C=\frac{\pi}{3},\mathrm{d}a=2,$$

$$\mathrm{d}b=5,\mathrm{d}C=\frac{\pi}{180},$$

于是 $\mathrm{d}c\approx 7.6$ 米.

从而第三边c之绝对误差约为7.6米.

【3251】 证明:在(0,0)点连续的函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在这个点上存在两个偏导数$f'_x(0,0)$和$f'_y(0,0)$,但在(0,0)点上不可微.

说明导数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$在点(0,0)邻域中的性质.

证 $$f'_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=0.$$

又 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to+0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当动点(x,y)沿直线$y=kx$趋于点$(0,0)$时，显然对不同的k有不同的极限值$\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$，因此，上述极限不存在，即在点$(0,0)$，

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y\neq o(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 从而$\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$不可微. 易求

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\\ \text{无意义}, & x=0,y\neq 0.\end{cases}$$

因此，$f'_x(x,y)$在点$(0,0)$的任何邻域内皆无界及存在无意义的点，$f'_y(x,y)$有类似性质.

【3252】 证明：函数若$x^2+y^2\neq 0$，$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$的邻域是连续，并且存在有界偏导数$f'_x(x,y)$及$f'_y(x,y)$，但是这个函数在$(0,0)$点上不可微.

证 $f(x,y)$在$x^2+y^2\neq 0$的点连续，又

$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

知 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0).$$

于是$f(x,y)$在点$(0,0)$的邻域连续.

又 $$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当$x^2+y^2\neq 0$时，

由 $\quad |f'_x(x,y)| \leqslant \frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = 1,$

有 $f'_x(x,y)$ 在(0,0) 点的邻域内有界,同理 $f'_y(x,y)$ 在(0,0) 点的邻域内有界.

由 $\quad f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0,$

且 $$\lim_{\rho\to+0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - xf'_x(0,0) - yf'_y(0,0)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to+0} \frac{xy}{x^2+y^2},$$

不存在,于是 $f(x,y)$ 在点(0,0) 不可微.

【3253】 证明:$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

函数在点(0,0) 的邻域存在偏导数 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$,它们在(0,0) 点不连续并且在此点的任何邻域无界,但这个函数在(0,0) 点可微.

证 当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时,$f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$ 皆存在,且

$$f'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

又 $$f'_x(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to0} y\sin\frac{1}{y^2} = 0,$$

于是 $f(x,y)$ 在(0,0) 点有偏导数.

又由 $$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi$$

$$= -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty\ (n\to\infty),$$

因此,$f'_x(x,y)$ 在(0,0) 点的任何邻域内无界,因此 $f'_x(x,y)$ 在(0,0) 点不连续,同理 $f'_y(x,y)$ 在(0,0) 点的任何邻域中也无界,

从而 $f'_y(x,y)$ 在点$(0,0)$处也不连续，但 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点可微分，事实上

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0,$$

且
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\rho}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

于是
$$f(x,y)=f(0,0)+xf'_x(0,0)+yf'_y(0,0)+o(\rho),$$
即函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点可微分.

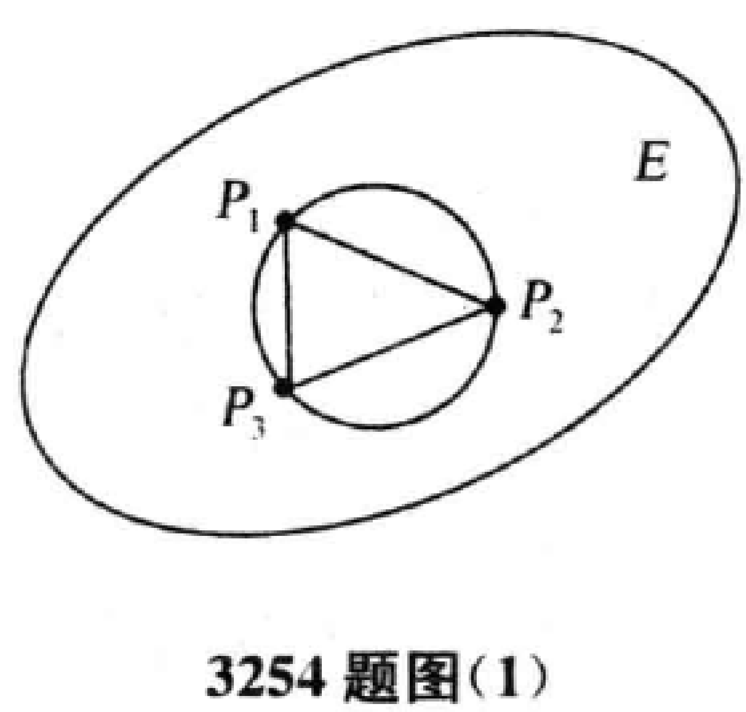
【3254】 证明：在某个凸域 E 具有有界偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$ 在这个域内一致连续.

证 由 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 E 内有界，于是存在 $L>0$，当$(x,y)\in E$ 时，有

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{L}{2},\ |f'_y(x,y)|\leqslant\frac{L}{2}.$$

现在 E 内的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$.

1° 若以 $|P_1P_2|$ 为直径的圆（包括圆圈在内）皆属于 E（3254 题图(1)），则点 $P_3(x_1,y_2)$ 及线段 P_1P_3，P_2P_3 皆在 E 内，于是



3254 题图(1)

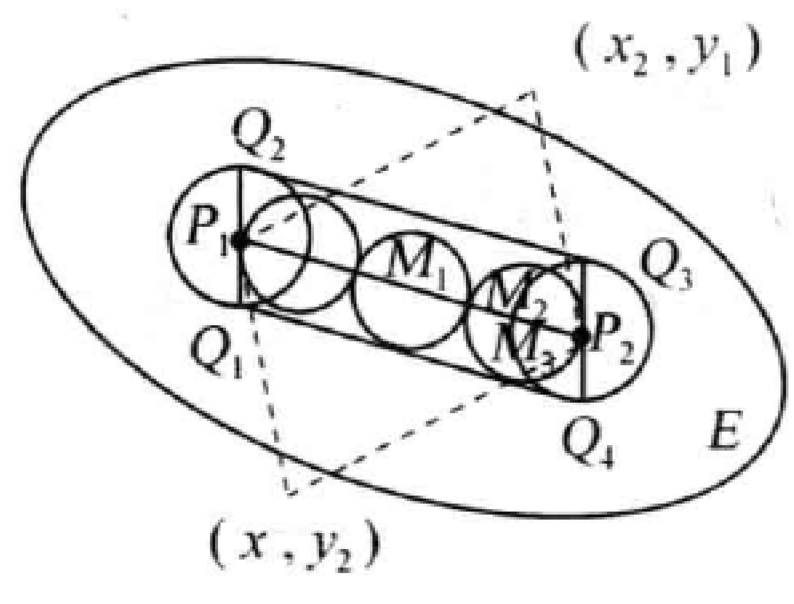
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$
$$\leqslant|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|$$
$$=|f'_y(x_1,\xi)|\cdot|y_1-y_2|+|f'_x(\eta,y_2)|\cdot|x_1-x_2|,$$

其中 ξ 介于 y_1,y_2 之间，η 介于 x_1,x_2 之间，由偏导函数的有界性，

有 $$\begin{aligned}&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\\ \leqslant{}&\frac{L}{2}|y_1-y_2|+\frac{L}{2}|x_1-x_2|\\ \leqslant{}&\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ &+\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ ={}&L\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\end{aligned}$$

也就是 $$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2|.$$

2° 如 3254 题图(2) 所示,$P_1\in E$,$P_2\in E$,但点(x_1,y_2)和(x_2,y_1)不一定属于E,由于P_1和P_2均为E的内点,于是存在$R>0$,使得分别以P_1,P_2为圆心,R为半径的圆(包括圆圈在内)皆在E内,作两圆的外公切线Q_1Q_4及Q_2Q_3,则由切点均在E内知,矩形$Q_1Q_2Q_3Q_4$整个落在E内.



3254 题图(2)

不难看出,在直线P_1P_2上可取足够多的分点.

$$P_1=M_0,M_1,M_2,\cdots M_n=P_2,$$

使 $$|M_{k-1}M_k|<2R,k=1,2,\cdots,n,$$

则以$|M_{k-1}M_k|$为直径的圆全落在矩形内,从而也在E内,于是

$$\begin{aligned}&|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(M_k)-f(M_{k-1})|\\ \leqslant{}&\sum_{k=1}^{n}L\cdot|M_kM_{k-1}|=L\cdot\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|\\ ={}&L\cdot|P_1P_2|.\end{aligned}$$

于是对 E 中任意两点，函数 $f(P)$ 满足李普希兹条件.

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，当 $P_1\in E,P_2\in E$ 且 $|P_1P_2|<\delta$ 时，有 $|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L\cdot|P_1P_2|<L\delta=\varepsilon$.
则函数 $f(x,y)$ 在 E 中一致连续.

【3255】 证明：若函数 $f(x,y)$ 对变量 x（对每一个固定值 y）是连续的，对变量 y 具有有界导数 $f'_y(x,y)$，则这个函数对于变量 x 和 y 的总体是连续的.

证 任取 $P_0(x_0,y_0)\in E$，且以 P_0 为中心的一个充分小的开球 G_0，有 $G_0\subset E$，设在 G_0 内，有 $|f'_y(x,y)|\leqslant L$，于是，当 (x,y')，(x,y'') 属于 G_0 时，有

$$\begin{aligned}|f(x,y')-f(x,y'')|&=|f'_y(x,\xi)|\cdot|y'-y''|\\&\leqslant L|y'-y''|,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 y' 与 y'' 之间的一数，因此，由 3206 题结论知 $f(x,y)$ 在 G_0 中连续，于是在 P_0 点连续，由 P_0 的任意性知 $f(x,y)$ 在 E 内连续.

在下列各题中求出指定的偏导数(3256 ～ 3265).

【3256】 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y},\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$，

若
$$\begin{aligned}u=&x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y\\&-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4.\end{aligned}$$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2+6x-6y+12x^2-8y^2$，

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6+24x$，

于是 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24,\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=0,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=-16.$

【3257】 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$，若 $u=x\ln(xy)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\ln(xy)+1,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x}$，

于是 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0.$

【3258】 $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$,若 $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

解 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6\sin y + y^3 \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 6\sin y - y^3 \cos x$,

于是 $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = 6\sin\left(y + \dfrac{3\pi}{2}\right) - 6\cos x = -6(\cos y + \cos x).$

【3259】 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$,若 $u = \arctan \dfrac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$.

解 由

$$u = \arctan x + \arctan y + \arctan z + \alpha\pi,\quad (\alpha = 0, \pm 1),$$

有 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$

【3260】 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$,若 $u = e^{xyz}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz e^{xyz}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z e^{xyz} + xyz^2 e^{xyz}$,

于是
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz} + xyz e^{xyz} + 2xyz e^{xyz} + x^2 y^2 z^2 e^{xyz} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2).$$

【3261】 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$,若 $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$.

解 设

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

则 $u = -\ln r$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - \xi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2(x - \xi)(y - \eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial \xi} = -\frac{2(y - \eta)}{r^4} + \frac{8(x - \xi)^2 (y - \eta)}{r^6},$$

于是 $$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=\frac{2}{r^4}-\frac{8(y-\eta)^2}{r^6}-\frac{8(x-\xi)^2}{r^6}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}.$$

【3262】 $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$,若 $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

解 $\dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}=p!\cdot(y-y_0)^q$,

于是 $$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}=p!q!,(p,q\in\mathbf{N}).$$

【3263】 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$,若 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$.

解 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$,

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m m!\frac{2y}{(x-y)^{m+1}},$$

由高阶导数的莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}&=(-1)^m\cdot 2(m!)\cdot\left\{y\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y)\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right]\right\}\\&=2\cdot(-1)^m m!\cdot\left\{\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)y}{(x-y)^{m+n+1}}+\frac{n(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right\}\\&=\frac{2\cdot(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}.\end{aligned}$$

【3264】 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$,若 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

解 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}=x^2e^x\cdot e^y+y^2e^y\cdot e^x=u_1+u_2$,

易知 $$\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=e^x\cdot y^2e^y.$$

由莱布尼兹公式有

$$\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^x y^2 e^y)=e^x\frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2e^y)$$

$$=e^x\left\{y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y)+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y)+C_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y)\right\}$$

$$=e^{x+y}\{y^2+2ny+n(n-1)\}.$$

同理有 $\dfrac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}\{x^2+2mx+m(m-1)\}.$

于是

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}+\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}$$

$$=e^{x+y}[x^2+y^2+2mx+2ny+m(m-1)+n(n-1)].$$

【3265】 $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$,若 $u=xyze^{x+y+z}$.

解

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$$

$$=\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p\partial y^p\partial z^r}(xe^x\cdot ye^y\cdot ze^z)$$

$$=\frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x)\cdot\frac{\partial^p}{\partial y^q}(ye^y)\cdot\frac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z)$$

$$=e^x(x+p)\cdot e^y(y+q)\cdot e^z(z+r)$$

$$=e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r).$$

【3266】 若 $f(x,y)=e^x\sin y$,求 $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$.

解 $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)=e^x\sin\left(y+\dfrac{n\pi}{2}\right)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\sin\dfrac{n\pi}{2}.$

【3267】 证明:若 $u=f(xyz)$ 则 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=F(t)$,其中 $t=xyz$,并求出函数 F.

证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yzf'(t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yzf''(t) \cdot xz + zf'(t),$$

于是有 $$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = x^2y^2z^2f'''(t) + 2xyzf''(t) + f'(t) + xyzf''(t)$$
$$= x^2y^2z^2f'''(t) + 3xyzf''(t) + f'(t)$$
$$= t^2f'''(t) + 3tf''(t) + f'(t) = F(t).$$

【3268】 若

$$u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2$$
$$+ y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1,$$

求 d^4u.

导数 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ 和 $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ 等于什么?

解 $$d^4u = 24dx^4 - 2C_4^1 d^3(x^3)dy - 2C_4^1 dx d^3(y^3) + 24dy^4$$
$$= 24(dx^4 - 2dx^3dy - 2dxdy^3 + dy^4),$$

由 $$d^4u = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u,$$

有 $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -12, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24.$$

在下列各题中求出指定阶的全微分(3269 ~ 3278).

【3269】 d^3u,若 $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$.

解 $d^3u = 6(dx^3 + dy^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2)$.

【3270】 d^3u,若 $u = \sin(x^2 + y^2)$.

解 $$du = 2x\cos(x^2+y^2)dx + 2y\cos(x^2+y^2)dy$$
$$= 2(xdx + ydy)\cos(x^2+y^2),$$
$$d^2u = -4\sin(x^2+y^2)(xdx+ydy)^2$$
$$+ 2\cos(x^2+y^2)\cdot(dx^2+dy^2),$$

故 $$d^3u = -8\cos(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)^3$$
$$-8\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)\cdot(dx^2+dy^2)$$
$$-4\sin(x^2+y^2)\cdot(xdx+ydy)\cdot(dx^2+dy^2)$$

$$= -8(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)^3\cos(x^2+y^2)$$
$$-12(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)\sin(x^2+y^2).$$

【3271】 $\mathrm{d}^{10}u$,若 $u=\ln(x+y)$.

解 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}$,

于是 $\mathrm{d}^{10}u = \dfrac{9!(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^{10}}{(x+y)^{10}}$.

【3272】 d^6u,若 $u=\cos x\mathrm{ch}y$.

解
$$\mathrm{d}^6u = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^6u$$
$$= -\cos x\mathrm{ch}y\mathrm{d}x^6 - 6\sin x\mathrm{sh}y\mathrm{d}x^5\mathrm{d}y$$
$$+15\cos x\mathrm{ch}y\mathrm{d}x^4\mathrm{d}y^2+20\sin x\mathrm{sh}y\mathrm{d}x^3\mathrm{d}y^3$$
$$-15\cos x\mathrm{ch}y\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^4-6\sin x\mathrm{sh}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y^5$$
$$+\cos x\mathrm{ch}y\mathrm{d}y^6$$
$$= -(\mathrm{d}x^6-15\mathrm{d}x^4\mathrm{d}y^2+15\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^4-\mathrm{d}y^6)\cos x\mathrm{ch}y$$
$$-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y(3\mathrm{d}x^4-10\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^2+3\mathrm{d}y^4)\cdot\sin x\mathrm{sh}y.$$

【3273】 d^3u,若 $u=xyz$.

解 由
$$\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}^2z=0,$$
有
$$\mathrm{d}^3u=\mathrm{d}^3(xyz)=C_3^1\mathrm{d}x\mathrm{d}^2(yz)$$
$$=3\mathrm{d}x\cdot(C_2^1\mathrm{d}y\mathrm{d}z)=6\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【3274】 d^4u,若 $u=\ln(x^xy^yz^z)$.

解 由 $u=x\ln x+y\ln y+z\ln z$

有
$$\mathrm{d}^4u=(x\ln x)^{(4)}\mathrm{d}x^4+(y\ln y)^{(4)}\mathrm{d}y^4+(z\ln z)^{(4)}\mathrm{d}z^4$$
$$=2\left(\frac{\mathrm{d}x^4}{x^3}+\frac{\mathrm{d}y^4}{y^3}+\frac{\mathrm{d}z^4}{z^3}\right).$$

【3275】 d^nu,若 $u=\mathrm{e}^{ax+by}$.

解 由 $\mathrm{d}^2(ax+by)=0$,

有
$$\mathrm{d}^nu=\mathrm{d}^n(\mathrm{e}^{ax+by})=\mathrm{e}^{ax+by}[\mathrm{d}(ax+by)]^n$$
$$=\mathrm{e}^{ax+by}(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)^n.$$

【3276】 d^nu,若 $u=X(x)Y(y)$.

解 $$\mathrm{d}^n u = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{d}^{n-k} X(x) \cdot \mathrm{d}^k Y(y)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) \mathrm{d}x^{n-k} \mathrm{d}y^k.$$

【3277】 $\mathrm{d}^n u$，若 $u = f(x+y+z)$.

解 由 $\mathrm{d}^2(x+y+z) = 0$，

有 $$\mathrm{d}^n u = f^{(n)}(x+y+z) \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^n.$$

【3278】 $\mathrm{d}^n u$，若 $u = \mathrm{e}^{ax+by+cz}$.

解 由 $\mathrm{d}^2(ax+by+cz) = 0$，

有 $$\mathrm{d}^n u = \mathrm{e}^{ax+by+cz}(a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z)^n.$$

【3279】 设 $P_n(x,y,z)$ 为 n 次齐次多项式，证明：
$$\mathrm{d}^n P_n(x,y,z) = n! P_n(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

证 设 $P_n(x,y,z)$ 是形如 $Ax^p y^q z^r$ 的单项之和，其中 A 为常数，p,q,r 皆为非负整数，且 $p+q+r=n$，

由微分运算对加法及数乘运算是线性可交换的，因此

只要证明 $\mathrm{d}^n(x^p y^q z^r) = n! \mathrm{d}x^p \mathrm{d}y^q \mathrm{d}z^r$ 就足够了.

而 $$\mathrm{d}^n(x^p y^q z^r)$$
$$= C_n^{p+q} \mathrm{d}^{p+q}(x^p y^q) \cdot \mathrm{d}^r(z^r)$$
$$= \frac{n!}{r!(p+q)!}[C_{p+q}^p \mathrm{d}^p(x^p)\mathrm{d}^q(y^q) \cdot \mathrm{d}^r(z^r)]$$
$$= \frac{n!}{r!(p+q)!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!q!} \cdot p!q!r! \mathrm{d}x^p \mathrm{d}y^q \mathrm{d}z^r$$
$$= n! \mathrm{d}x^p \mathrm{d}y^q \mathrm{d}z^r.$$

【3280】 设
$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y},$$

若(1) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$；(2) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$，

求解 Au 和 $A^2 u = A(Au)$.

解 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

于是 $Au=\frac{x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-u,$

$$A^2u=A(Au)=A(-u)=-Au=u.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$

于是

$$Au=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1,$$

$$A^2u=A(Au)=0.$$

【3281】 设

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

若(1) $u=\sin x\operatorname{ch} y$;(2) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,求 Δu.

解 (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin x\operatorname{ch} y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\operatorname{ch} y,$

于是 $\Delta u=-\sin x\operatorname{ch} y+\sin x\operatorname{ch} y=0.$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$

由对称性有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

于是 $\Delta u=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$

【3282】 设

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

及 $\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$

若 (1) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$;

(2) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$.

解　(1) $\Delta_1 u = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2]$,

$\Delta_2 u = 6(x + y + z)$.

(2) 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

则 $$u = \frac{1}{r}.$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

由对称性有

$$\Delta_1 u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\Delta_2 u = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0.$$

求下列复合函数的一阶和二阶导数(3283 ～ 3285).

【3283】 $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2),$$

由对称性有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4y^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4z^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=4yzf''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=4xzf''(x^2+y^2+z^2).$$

【3284】 $u=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right).$$

这里 $f'_1,f'_2,f''_{11},f''_{12},f''_{22}$ 皆指按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导函数,以下各题类似符号以该题意义相同,不再详细说明.

【3285】 $u=f(x,xy,xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1(x,xy,xyz)+yf'_2(x,xy,xyz)$

$$+yzf'_3(x,xy,xyz),$$

将 $f'_1(x,xy,xyz),f'_2(x,xy,xyz),f'_3(x,xy,xyz)$ 简记为 f'_1,f'_2,f'_3,于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+yzf''_{13}+y(f''_{21}+yf''_{22}+yzf''_{23})$$

$$+yz(f''_{31}+yf''_{32}+yzf''_{33}),$$

由 $f''_{12}=f''_{21}, f''_{13}=f''_{31}, f''_{23}=f''_{32}$,

有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}.$$

同理有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+x^2zf''_{23}+x^2zf''_{32}+x^2z^2f''_{33}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{33}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=xf''_{12}+xzf''_{13}+f'_2+xyf''_{22}+xyzf''_{23}\\&\quad+zf'_3+xyzf''_{32}+xyz^2f''_{33}\\&=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}\\&\quad+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3.$$

【3286】 若 $u=f(x+y,xy)$,求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2$,

于是
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+yf''_{21}+xyf''_{22}=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2.$$

【3287】 若 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$,求 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + 2xf''_{12} + 2f'_2 + 2xf''_{21} + 4x^2 f''_{22}$$
$$= f''_{11} + 4xf''_{12} + 4x^2 f''_{22} + 2f'_2.$$

由对称性有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{11} + 4yf''_{12} + 4y^2 f''_{22} + 2f'_2,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''_{11} + 4zf''_{12} + 4z^2 f''_{22} + 2f'_2,$$

从而 $\Delta u = 3f''_{11} + 4(x+y+z)f''_{12} + 4(x^2+y^2+z^2)f''_{22} + 6f'_2.$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分(x, y 和 z 为自变量)(3288 ~ 3301).

【3288】 $u = f(t)$,式中 $t = x + y$.

解 $du = f'(t)(dx + dy)$,

$d^2u = f''(t)(dx + dy)^2$.

【3289】 $u = f(t)$,式中 $t = \dfrac{y}{x}$.

解 $du = f'(t) \cdot \dfrac{xdy - ydx}{x^2}$,

$$d^2u = f''(t) \cdot \frac{(xdy - ydx)^2}{x^4} - 2f'(t) \cdot \frac{dx(xdy - ydx)}{x^3}.$$

【3290】 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 $du = f' \cdot \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$d^2u = f'' \cdot \frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【3291】 $u = f(t)$,其中 $t = xyz$.

解 $du = f'(t)(yzdx + xzdy + xydz)$,

$$d^2u = f''(t)(yzdx + xzdy + xydz)^2 + 2f'(t)(zdxdy + ydxdz + xdydz).$$

【3292】 $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 $du = 2f' \cdot (xdx + ydy + zdz)$,

$$d^2u = 4f'' \cdot (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)^2 + 2f' \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2).$$

【3293】 $u = f(\xi,\eta)$，其中 $\xi = ax, \eta = by$.

解　$\mathrm{d}u = af'_1\mathrm{d}x + bf'_2\mathrm{d}y,$

$$\mathrm{d}^2u = a^2f''_{11}\mathrm{d}x^2 + 2abf''_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b^2f''_{22}\mathrm{d}y^2.$$

【3294】 $u = f(\xi,\eta)$，其中 $\xi = x+y, \eta = x-y$.

解　$\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + f'_2 \cdot (\mathrm{d}x - \mathrm{d}y),$

$$\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2f''_{12} \cdot (\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2) + f''_{22} \cdot (\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)^2.$$

【3295】 $u = f(\xi,\eta)$，其中 $\xi = xy, \eta = \dfrac{x}{y}$.

解　$\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + f'_2 \cdot \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$

$$\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)^2 + f''_{22} \cdot \frac{(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)^2}{y^4} + 2f''_{12} \cdot \frac{y^2\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}y^2}{y^2} + 2f'_1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2f'_2 \cdot \frac{(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)\mathrm{d}y}{y^3}.$$

【3296】 $u = f(x+y, z)$.

解　$\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + f'_2 \cdot \mathrm{d}z,$

$$\mathrm{d}^2u = f'_{11} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2f''_{12} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\mathrm{d}z + f''_{22}\mathrm{d}z^2.$$

【3297】 $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

解　$\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) + 2f'_2 \cdot (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z),$

$$\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2 + 4f''_{12} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) + 4f''_{22} \cdot (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)^2 + 2f'_2 \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2).$$

【3298】 $u = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$.

解　$\mathrm{d}u = f'_1 \cdot \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} + f'_2 \cdot \dfrac{z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z}{z^2},$

$$d^2u = f''_{11}\cdot\frac{(ydx - xdy)^2}{y^4} + f''_{22}\cdot\frac{(zdy - ydz)^2}{z^4}$$
$$+2f''_{12}\cdot\frac{(ydx - xdy)(zdy - ydz)}{y^2z^2}$$
$$-2f'_1\cdot\frac{(ydx - xdy)dy}{y^3} - 2f'_2\cdot\frac{(zdy - ydz)dz}{z^3}.$$

【3299】 $u = f(x,y,z)$,式中 $x = t, y = t^2, z = t^3$.

解 $du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2 f'_3)dt$,

$$d^2u = (f''_{11} + 4t^2 f''_{22} + 9t^4 f''_{33} + 4tf''_{12} + 6t^2 f''_{13}$$
$$+ 12t^3 f''_{23} + 2f'_2 + 6tf'_3)dt^2.$$

【3300】 $u = f(\xi,\eta,\zeta)$,其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$.

解 $du = af'_1\cdot dx + bf'_2\cdot dy + cf'_3\cdot dz$,

$$d^2u = a^2 f''_{11}\cdot dx^2 + b^2 f''_{22}\cdot dy^2 + c^2 f''_{33}\cdot dz^2$$
$$+ 2abf''_{12}\cdot dxdy + 2acf''_{13}\cdot dxdz + 2bcf''_{23}\cdot dydz.$$

【3301】 $u = f(\xi,\eta,\zeta)$,其中

$$\xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \zeta = 2xy.$$

解 $du = 2f'_1\cdot(xdx + ydy) + 2f'_2\cdot(xdx - ydy) + 2f'_3\cdot(ydx + xdy)$,

$$d^2u = 4f''_{11}\cdot(xdx + ydy)^2 + 4f''_{22}\cdot(xdx - ydy)^2$$
$$+4f''_{33}\cdot(ydx + xdy)^2 + 8f''_{12}\cdot(x^2dx^2 - y^2dy^2)$$
$$+8f''_{13}\cdot(xdx + ydy)(ydx + xdy)$$
$$+8f''_{23}\cdot(xdx - ydy)(ydx + xdy)$$
$$+2f'_1\cdot(dx^2 + dy^2) + 2f'_2\cdot(dx^2 - dy^2)$$
$$+4f'_3\cdot dxdy.$$

求其 $d^n u$,设(3302 ~ 3303).

【3302】 $u = f(ax + by + cz)$.

解 $d^n u = f^{(n)}(ax + by + cz)\cdot(adx + bdy + cdz)^n$.

【3303】 $u = f(ax, by, cz)$.

解 $d^n u = \left(adx\frac{\partial}{\partial\xi} + bdy\frac{\partial}{\partial\eta} + cdz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$,

其中

$$\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz.$$

【3304】 $u = f(\xi, \eta, \zeta)$，式中

$$\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

解

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^n u &= \Big[(a_1 \mathrm{d}x + b_1 \mathrm{d}y + c_1 \mathrm{d}z)\frac{\partial}{\partial \xi} \\
&\quad + (a_2 \mathrm{d}x + b_2 \mathrm{d}y + c_2 \mathrm{d}z)\frac{\partial}{\partial \eta} \\
&\quad + (a_3 \mathrm{d}x + b_3 \mathrm{d}y + c_3 \mathrm{d}z)\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big]^n f(\xi, \eta, \zeta) \\
&= \Big[\mathrm{d}x\Big(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big) \\
&\quad + \mathrm{d}y\Big(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big) \\
&\quad + \mathrm{d}z\Big(c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big)\Big]^n f(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned}$$

【3305】 设

$$u = f(r),$$

其中　$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，且 f 为可微分两次的函数. 证明

$$\Delta u = F(r),$$

其中 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子，并求出函数 F.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

由对称性有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - y^3}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \cdot \frac{z^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

于是 $\quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+2f'(r)\cdot\frac{1}{r}=F(r).$

【3306】 设 u 和 v 为可微分两次的函数,Δu 为拉普拉斯算子(见例题 3305). 证明:

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v).$$

其中 $\quad \Delta(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$

证
$$\begin{aligned}\Delta(uv)&=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}\\&=\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&\quad+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&\quad+\left(u\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\&=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v).\end{aligned}$$

【3307】 证明:函数

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

证
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},$$

由对称性有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},$$

于是 $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

【3308】 证明:若函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程(见例题 3307),则

$$v = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

也满足这个方程式.

证　设

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2}, \eta = \frac{y}{x^2+y^2},$$

则　$v(x,y) = u(\xi,\eta)$.

从而　$v''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + u'_\eta \cdot \eta''_{xx}$,

$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_y)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_y)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_y\eta'_y + u'_\xi \cdot \xi''_{yy} + u'_\eta \cdot \eta''_{yy}$.

由　$\xi'_x = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\eta'_y$,

$$\xi'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \eta'_x,$$

$$\xi''_{yy} = (\xi'_y)'_y = (\eta'_x)'_y = (\eta'_y)'_x = -\xi''_{xx},$$

$$\eta''_{yy} = (\eta'_y)'_y = (-\xi'_x)'_y = (\xi'_y)'_x = -\eta''_{xx},$$

及　$u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + u''_{\eta\eta}(\xi,\eta) = 0$,

有

$$\begin{aligned}
\Delta v &= v''_{xx} + v''_{yy} \\
&= u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x\eta'_x \\
&\quad + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + u'_\eta \cdot \eta''_{xx} + u''_{\xi\xi} \cdot (\eta'_x)^2 \\
&\quad + u''_{\eta\eta} \cdot (-\xi'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_x(-\xi'_x) \\
&\quad + u'_\xi \cdot (-\xi''_{xx}) + u'_\eta \cdot (-\eta''_{xx}) \\
&= (u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta})[(\xi'_x)^2 + (\eta'_x)^2] = 0.
\end{aligned}$$

于是函数 v 也满足拉普拉斯方程.

【3309】　证明:函数

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a 和 b 为常数)满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\cdot[(x-b)^2-2a^2t]$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-b}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\cdot[(x-b)^2-2a^2t].$$

比较$\dfrac{\partial u}{\partial t}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,有$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,即函数 u 满足热传导方程.

【3310】 证明:若函数 $u=u(x,t)$ 满足热传导方程(见例题3309),则函数:

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{x}{a^4t}\right)\qquad(t>0),$$

也满足这个方程.

证 设

$$w=w(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

这是3309题中的函数 u 乘 $2\sqrt{\pi}$,且令 $b=0$ 而得到的,于是它满足热传导方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

显然有 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{2x}{4a^2t}w=-\dfrac{xw}{2a^2t}$.

令 $\xi=\xi(x,t)=\dfrac{x}{a^2t},\eta=\eta(t)=-\dfrac{1}{a^4t}$,

则 $\xi'_x=\dfrac{1}{a^2t},\xi''_{xx}=0$,

$$\xi'_t=-\frac{x^2}{a^2t^2},\eta'_t=\frac{1}{a^4t^2}.$$

由 $v=w(x,t)\cdot u(\xi,\eta)$, $\quad u'_\eta=a^2u''_{\xi\xi}$,

故
$$\begin{aligned}v'_t&=w'_t\cdot u+w\cdot(u'_\xi\cdot\xi'_t+u'_\eta\cdot\eta'_t)\\&=a^2w''_{xx}\cdot u\end{aligned}$$

$$+w\cdot\left[u'_{\xi}\cdot\left(-\frac{x^2}{a^2t^2}\right)+a^2u''_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{1}{a^4t^2}\right)\right],$$

$$v'_x=w'_x\cdot u+wu'_{\xi}\cdot\xi'_x,$$

$$\begin{aligned}v''_{xx}&=w''_{xx}\cdot u+2w'_x\cdot u'_{\xi}\xi'_x+wu''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+wu'_{\xi}\cdot\xi''_{xx}\\&=w''_{xx}\cdot u+2\left(-\frac{xw}{2a^2t}\right)u'_{\xi}\cdot\left(\frac{x}{a^2t}\right)+wu''_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{1}{a^2t}\right)^2\\&=w''_{xx}\cdot u-\frac{x^2w}{a^4t^2}u'_{\xi}+\frac{w}{a^4t^2}u''_{\xi\xi}.\end{aligned}$$

比较 v'_t 和 v''_{xx}，有

$$v'_t=a^2v''_{xx},$$

从而函数 v 也满足热传导方程.

【3311】 证明：函数

$$u=\frac{1}{r},$$

（其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$），当 $r\neq 0$ 时，满足拉普拉斯方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0.$$

证　因为

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-c)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-b)^2}{r^5},$$

将上述三式相加有

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

【3312】 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程（见例题 3311），则函数 $v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\frac{k^2y}{r^2},\frac{k^2z}{r^2}\right)$（其中 k 为常数及 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）也满足这个方程式.

证 设

$$S = S(x,y,z) = \frac{1}{r},$$

则由 3282 题有

$$\Delta S = S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz} = 0,$$

$$(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2 = \frac{1}{r^4} = S^4,$$

$$S'_x = -\frac{x}{r^3} = -S^3 x, S'_y = -S^3 y,$$

$$S'_z = -S^3 z.$$

于是 $v = \frac{1}{r}u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right) = Su(k^2 S^2 x, k^2 S^2 y, k^2 S^2 z).$

记 $v = Sw(x,y,z,S) = F(x,y,z,S),$

其中 $w(x,y,z,S) = u(k^2 S^2 x, k^2 S^2 y, k^2 S^2 z).$

则有 $v'_x = F'_x + F'_s \cdot S'_x,$

$$v''_{xx} = F''_{xx} + 2F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ss} \cdot (S'_x)^2 + F'_s \cdot S''_{xx}.$$

由对称性有

$$v''_{yy} = F''_{yy} + 2F''_{ys} \cdot S'_y + F''_{ss} \cdot (S'_y)^2 + F'_s \cdot S''_{yy},$$

$$v''_{zz} = F''_{zz} + 2F''_{zs} \cdot S'_z + F''_{ss} \cdot (S'_z)^2 + F'_s \cdot S''_{zz}.$$

于是
$$\begin{aligned}\Delta v = &(F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}) + F'_s \cdot (S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz}) \\ &+ \{2(F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ys} \cdot S'_y + F''_{ys} \cdot S'_z) \\ &+ F''_{ss}[(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2]\}.\end{aligned}$$

又
$$F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz} = r^4 S^5 \cdot (u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}) = 0, \quad ①$$

$$\begin{aligned}Sw'_s &= 2k^2 S^2 xu'_1 + 2k^2 S^2 yu'_2 + 2k^2 S^2 zu'_3 \\ &= 2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z,\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}&F''_{ss} \cdot [(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2] \\ &= (Sw)''_{ss} \cdot S^4 = (w + Sw'_s)'_s \cdot S^4 \\ &= (w + 2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z) \cdot S^4 \\ &= S^4 w'_s + 2xS^4 w''_{xs} + 2yS^4 w''_{ys} + 2zS^4 w''_{zs}, \quad ②\end{aligned}$$

而 $2(F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ys} S'_y + F''_{zs} \cdot S'_z)$

$$= 2(Sw)''_{xs} \cdot (-S^3 x) + 2(Sw)''_{ys} \cdot (-S^3 y)$$
$$+ 2(Sw)''_{zs} \cdot (-S^3 z)$$
$$= -2S^3 x \cdot (Sw'_x)'_s - 2S^3 y \cdot (Sw'_y)'_s - 2S^3 z \cdot (Sw'_z)'_s$$
$$= -2S^3 x \cdot (w'_x + Sw''_{xs}) - 2S^3 y \cdot (w'_y + Sw''_{ys})$$
$$-2S^3 z \cdot (w'_z + Sw''_{xz})$$
$$= -S^3(2xw' + 2yw'_y + 2zw'_z) - 2S^4 w''_{xs}$$
$$-2yS^4 w''_{ys} - 2zS^4 w''_{zs}$$
$$= -S^4 w'_s - 2xS^4 w''_{xs} - 2yS^4 w''_{ys} - 2zS^4 w''_{zs}, \qquad ③$$

由 ⓪,①,②,③ 知

$$\Delta v = 0.$$

【3313】 证明:函数

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r},$$

满足亥尔姆霍兹方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,$C_1$ 与 C_2 为常数.

证　设

$$v = \frac{1}{r} e^{-ar}, w = \frac{1}{r} e^{ar},$$

则有　$u = C_1 v + C_2 w$,

$$v'_x = v'_r \cdot r'_x = e^{-ar} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{a}{r}\right) \cdot \frac{x}{r}$$
$$= -xv \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r}\right),$$
$$v''_{xx} = -v'_x \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r}\right) \cdot x - v \cdot \left(-\frac{2}{r^3} - \frac{a}{r^2}\right) \cdot \frac{x}{r} \cdot x$$
$$-v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r}\right)$$
$$= x^2 v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r}\right)^2 + x^2 v \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{2}{r^3} + \frac{a}{r^2}\right)$$
$$-v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r}\right)$$

$$= v \cdot \left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)x^2-\frac{1}{r^2}-\frac{a}{r}\right].$$

由对称性有

$$\Delta v = v \cdot \left[\left(\frac{3}{r^4}+\frac{3a}{r^3}+\frac{a^2}{r^2}\right)\cdot(x^2+y^2+z^2)-\frac{3}{r^2}-\frac{3a}{r}\right]$$
$$= a^2 v,$$

令 $b=-a$,

有 $$w=\frac{1}{r}e^{-br}.$$

同理有 $\Delta w = b^2 w = a^2 w.$

于是 $$\Delta u = \Delta(C_1 v + C_2 w) = C_1 \Delta v + C_2 \Delta w$$
$$= C_1 a^2 v + C_2 a^2 w = a^2 u,$$

故 $\Delta u = a^2 u.$

【3314】 设函数 $u_1 = u_1(x,y,z)$ 及 $u_2 = u_2(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程式 $\Delta u = 0$.

证明函数 $v = u_1(x,y,z) + (x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$ 满足二重调和方程 $\Delta(\Delta v) = 0$.

证 由 3306 题结论知

$$\Delta v = \Delta u_1 + (x^2+y^2+z^2)\Delta u_2 + u_2 \cdot \Delta(x^2+y^2+z^2)$$
$$+2\left(2x\frac{\partial u_2}{\partial x}+2y\frac{\partial u_2}{\partial y}+2z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$
$$=6u_2+4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x}+y\frac{\partial u_2}{\partial y}+z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

$$\Delta(\Delta v) = 6\Delta u_2 + 4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right.$$
$$+z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\},$$

又 $$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Delta u_2 = 0.$$

类似地 $\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = 0, \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) = 0.$

于是 $\Delta(\Delta v) = 0.$

【3315】 设 $f(x,y,z)$ 是可微分 m 次的 n 次齐次函数. 证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)$$
$$= n(n-1)\cdots(n-m+1)\, f(x,y,z).$$

证 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z), t > 0, \tag{①}$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = x\frac{\partial f}{\partial(xt)} + y\frac{\partial f}{\partial(yt)} + z\frac{\partial f}{\partial(zt)}$$
$$= t^{n-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$$
$$= x\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)} + z\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(zt)}\right\}$$
$$+ y\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(xt)} + y\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}\right\}$$
$$+ z\left\{x\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)} + y\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(yt)} + z\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}\right\}$$
$$= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2}$$
$$+ 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)}$$
$$+ 2zx\frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)}$$
$$= t^{n-2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z).$$

由数学归纳法有

$$\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}t^m}=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m}C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\frac{\partial^m f}{\partial(xt)^{\alpha_1}\partial(yt)^{\alpha_2}\partial(zt)^{\alpha_3}}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$$

$$=t^{n-m}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z),\qquad ②$$

其中 $\quad C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}=\dfrac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}$,

总和是关于$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m$的非负整数$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一切可能组合而取的.

① 式右端对 t 求 m 阶导数有

$$[t^n f(x,y,z)]^{(m)}$$
$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y,z).\qquad ③$$

比较 ② 和 ③ 式,并令 $t=1$ 有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)$$
$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

【3316】 若 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$,其中 f 为可微分函数.试简化表达式 $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\quad \sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$=\sec x\cos x\cdot f'+\sec y\cdot(\cos y-\cos y\cdot f')$$
$$=f'+1-f'=1,$$

即 $\quad \sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}=1.$

【3317】 证明:函数 $z=x^n f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$(其中 f 为任意的可微分函数)满足方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$.

证 $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$=x\left\{nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x^2}\right)-\frac{2x^n y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)\right\}+2y\frac{x^n}{x^2}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right) = nz,$$

即 $$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

【3318】 证明:函数

$$z = yf(x^2 - y^2)$$

(其中 f 为任意的可微分函数)满足方程式:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

证 $$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 \cdot 2xyf' + xy \cdot (f - 2y^2 f')$$
$$= xyf = xz,$$

即 $$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

【3319】 若 $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x)$,其中 f 为可微分函数. 试简化表达式$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2(y+z) + xyz - f'_1 - f'_2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2z + f'_1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + f'_2,$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot y \cdot z.$$

【3320】 设 $x^2 = vw, y^2 = uw, z^2 = uv$ 及 $f(x,y,z) = F(u,v,w)$.

证明:$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$.

证 现把 u, v, w 当作自变量,有

$$uF'_u = u \cdot f'_x \cdot x'_u + u \cdot f'_y \cdot y'_u + uf'_z \cdot z'_u,$$
$$vF'_v = vf'_x \cdot x'_v + v \cdot f'_y \cdot y'_v + vf'_z \cdot z'_v,$$

$$wF'_w = wf'_x \cdot x'_w + wf'_y \cdot y'_w + wf'_z \cdot z'_w,$$

于是 $$uF'_u + vF'_v + wF'_w$$
$$= (ux'_u + vx'_v + wx'_w)f'_x + (uy'_u + vy'_v + wy'_w)f'_y + (uz'_u + vz'_v + wz'_w)f'_z. \quad ①$$

又由 $x^2 = vw$,

有 $$2x\frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

于是 $$\frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

同理 $$\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$

又由 $x^2 = vw, y^2 = uw, z^2 = uv$,

有 $$2x\frac{\partial x}{\partial w} = v, 2x\frac{\partial x}{\partial v} = w, 2y\frac{\partial y}{\partial u} = w,$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial w} = u, 2z\frac{\partial z}{\partial u} = v, 2z\frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

代入 ① 式有

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w$$
$$= \left(\frac{vw}{2x} + \frac{wv}{2x}\right)f'_x + \left(\frac{uw}{2y} + \frac{wu}{2y}\right)f'_y + \left(\frac{uv}{2z} + \frac{vu}{2z}\right)f'_z$$
$$= xf'_x + yf'_y + zf'z,$$

也就是

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = xf'_x + yf'_y + zf'_z.$$

假定 φ,ψ 等任意函数可进行足够次数的微分,验证下列等式(3321 ~ 3330).

【3321】 $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$,若 $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

解 由

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot 2x\varphi'(x^2 + y^2),$$

$$x\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y\varphi'(x^2 + y^2).$$

有
$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

【3322】 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$，若 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

解 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2$

$$=x^2\cdot\left[-\frac{y^2}{3x^2}+y\varphi'(xy)\right]-xy\cdot\left[\frac{2y}{3x}+x\varphi'(xy)\right]+y^2$$

$$=0.$$

【3323】 $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$，若 $z=e^y\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$.

解 $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}$

$$=(x^2-y^2)e^y\cdot\frac{x\varphi'}{y^2}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$+xy\cdot\left\{e^y\varphi+e^y\varphi'\cdot\left[e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^3}ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right]\right\}$$

$$=xye^y\varphi=xyz.$$

【3324】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$，若 $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right)$.

解 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial y}$

$$=nx^n\varphi-\alpha x^{n-\alpha}y\varphi'_1-\beta x^{n-\beta}z\varphi'_2+\alpha yx^{n-\alpha}\varphi'_1+\beta zx^{n-\beta}\varphi'_2$$

$$=nx^n\varphi=nu.$$

【3325】 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$，若

$$u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right).$$

解 $x\frac{\partial u}{\partial x}=x\cdot\frac{y}{z}\ln x+\frac{xy}{z}+x\varphi-y\varphi'_1-z\varphi'_2$，

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{z}\ln x+y\varphi'_1,$$

$$z\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z}\ln x+z\varphi'_2,$$

于是 $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$$

【3326】 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,若 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$.

解 因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''+a^2\psi'',\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''.$$

于是 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

【3327】 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,若

$$u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y).$$

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi+y\psi'+x\varphi',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'+\psi+y\psi',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'+y\psi''+x\varphi'', \qquad ①$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'+\psi'+y\psi''+x\varphi'', \qquad ②$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\varphi''+2\psi'+y\psi'', \qquad ③$$

于是 ① $-2\times$ ② $+$ ③ 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

【3328】 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,若

$$u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

解 令

$$u_1=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),u_2=x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

则 u_1 为零次齐次函数，u_2 为一次齐次函数．

由 3234 题结论有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1=0,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2=0.$$

于是
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)$$
$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2$$
$$=0.$$

【3329】 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$，若

$$u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

解　设

$$u_1=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right),u_2=x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

则 u_1 为 n 次齐次函数，u_2 为 $1-n$ 次齐次函数，由 3234 题结论知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1=n(n-1)u_1,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2=(1-n)(1-n-1)u_2=n(n-1)u_2,$$

于是
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)$$
$$=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

【3330】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，若 $u=\varphi[x+\psi(y)]$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi',\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''\psi',$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\psi',\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi'',$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

用逐次微分法来消去任意函数 φ 和 ψ(3331 ~ 3340).

【3331】 $z=x+\varphi(xy)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi',\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi',$

于是 $$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

【3332】 $z=x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi+\frac{x}{y^2}\varphi',\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\varphi',$

于是 $$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\varphi+\frac{2x^2}{y^2}\varphi'-\frac{2x^2}{y^2}\varphi'=2x\varphi=2z.$$

【3333】 $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi'}{\sqrt{x^2+y^2}},$

于是 $$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

【3334】 $u=\varphi(x-y,y-z)$.

解 由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'_1,\frac{\partial u}{\partial y}=-\varphi'_1+\varphi'_2,\frac{\partial u}{\partial z}=-\varphi'_2,$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

【3335】 $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$.

解 由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\varphi'_1,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\varphi'_1+\frac{1}{z}\varphi'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\varphi'_2,$$

于是　$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

【3336】 $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

解　由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x),$$

知　$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

【3337】 $z=\varphi(x)\psi(y)$.

解　由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\psi,\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi\psi',\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'\psi',$$

有　$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

【3338】 $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

解　由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'+\psi',\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'-\psi',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''+\psi'',\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''+\psi'',$$

有　$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

【3339】 $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解　因为函数 z 是一次齐次函数，由 3315 题结论知

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

【3340】 $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

解 令

$$z_1=\varphi(xy),$$

则由 3331 题知

$$x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}=0,$$

又令 $\quad z_2=\psi\left(\frac{x}{y}\right),$

则 z_2 为零次齐次函数,且

$$x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}=\frac{2x}{y}\psi',$$

也是零次齐次函数,从而函数

$$u=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\frac{\partial z_1}{\partial x}-y\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)+\left(x\frac{\partial z_2}{\partial x}-y\frac{\partial z_2}{\partial y}\right),$$

是零次齐次函数,于是,由 3315 题知

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

又
$$\begin{aligned}x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}&=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\&=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y},\end{aligned}$$

于是 $$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

【3341】 求函数 $z=x^2-y^2$ 在 $M(1,1)$ 点沿着与 Ox 轴的正向成 $\alpha=60^\circ$ 的 $\boldsymbol{l}$ 方向的导数.

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-2,$

$$\cos\alpha=\cos60^\circ=\frac{1}{2},\cos\beta=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

于是 $$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}.$$

【3342】　求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在 $M(1,1)$ 点沿着与 Ox 轴的正向成 α 角的 l 方向的导数. 问在什么方向上这个导数具有：(1) 最大值；(2) 最小值；(3) 等于 0.

解　由

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=1,$$

于是
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\cos\alpha+\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

(1) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大.

(2) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，即 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最小.

(3) 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l}=0$.

【3343】　求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 点沿着与过该点的等位线成垂直方向上的导数.

解　与等位线垂直的方向即梯度的方向或与梯度相反的方向，于是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\pm\left|\operatorname{grad}z\right|\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$
$$=\pm\left.\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$
$$=\pm\sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\left(\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2}$$
$$=\pm\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

【3344】　求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 点沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法线方向上的导数.

解 曲线$\frac{x_2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是函数$z$的一条等位线. 随着$x,y$的绝对值增大,$z$是减少的,因此,曲线的内法线方向即梯度方向,于是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=\left.|\operatorname{grad}z|\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}}}=\left.\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\right|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab},(a>0,b>0).$$

【3345】 求函数$u=xyz$在$M(1,1,1)$点沿着$\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$方向上的导数. 在这个点函数梯度的大小等于多少?

解 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\ y=1\\ z=1}}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,$$

$$\left.|\mathbf{grad}\boldsymbol{u}|\right|_{\substack{x=1\\ y=1\\ z=1}}=\left.\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|_{\substack{x=1\\ y=1\\ z=1}}=\sqrt{3}.$$

【3346】 求函数$u=\frac{1}{r}$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$梯度的大小和方向,其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

于是 $$\operatorname{grad}u=-\frac{1}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}),$$

或记为 $$\operatorname{grad}u=\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right).$$

在M_0点的梯度为

$$\operatorname{grad}u=\left(-\frac{x_0}{r_0^3},-\frac{y_0}{r_0^3},-\frac{z_0}{r_0^3}\right),$$

其中 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 从而有

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2+\left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2}=\frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(\operatorname{grad}u,x)=\frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(\mathrm{grad}u,y)=\frac{-\dfrac{y_0}{r_0^3}}{\dfrac{1}{r_0^2}}=-\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(\mathrm{grad}u,z)=\frac{-\dfrac{z_0}{r_0^3}}{\dfrac{1}{r_0^2}}=-\frac{z_0}{r_0}.$$

【3347】 确定函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在 $A(\varepsilon,0,0)$ 和 $B(0,\varepsilon,0)$ 两点的梯度之间的角度.

解 $\mathrm{grad}u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=(2x,2y,-2z)$,

令 $\mathrm{grad}u_A$ 和 $\mathrm{grad}u_B$ 分别表示在 A 点及 B 点的梯度,则有

$$\mathrm{grad}u_A=(2\varepsilon,0,0),\qquad \mathrm{grad}u_B=(0,2\varepsilon,0).$$

又 $$\mathrm{grad}u_A\cdot\mathrm{grad}u_B=2\varepsilon\cdot0+0\cdot2\varepsilon+0\cdot0=0,$$

于是 $\mathrm{grad}u_A\perp\mathrm{grad}u_B$,也就是在点 A 及点 B 二点的梯度之间的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

【3348】 在 $M(1,2,2)$ 点函数 $u=x+y+z$ 梯度的大小与函数 $v=x+y+z+0.001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 梯度的大小相差多少?

解 $\mathrm{grad}u=(1,1,1)$, $|\mathrm{grad}u|=\sqrt{3}$,

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

于是 $$\frac{\partial v}{\partial x}=1+1000\pi\frac{x}{r}\cos(10^6\pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=1+1000\pi\frac{y}{r}\cos(10^6\pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=1+1000\pi\frac{z}{r}\cos(10^6\pi r).$$

在 $M(1,2,2)$ 处

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1000\pi}{3}+1\approx\frac{1000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2000\pi}{3}+1\approx\frac{2000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2000\pi}{3}+1\approx\frac{2000\pi}{3},$$

$$|\operatorname{grad}v|\approx 1000\pi\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1000\pi,$$

从而,两梯度的大小相差为

$$|\operatorname{grad}v|-|\operatorname{grad}u|\approx 1000\pi-\sqrt{3}\approx 3140.$$

【3349】 证明:函数

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

与 $$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a,b,c,m,n,p 为常数且 $a^2+b^2+c^2\neq 0$) 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的梯度之间的角度在 M_0 无限远移时趋向于 0.

证 M_0 无限远移是指 $x_0\to\infty,y_0\to\infty,z_0\to\infty$ 同时成立,易知

$$\operatorname{grad}u=(2ax_0,2by_0,2cz_0),$$

$$\operatorname{grad}v=(2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2\beta),$$

令 $\alpha=ax_0,\beta=by_0,\gamma=cz_0,$

$$\alpha_1=ax_0+m=\alpha+m,$$

$$\beta_1=by_0+n=\beta+n,$$

$$\gamma_1=cz_0+p=\gamma+p.$$

于是,gradu 与 gradv 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}},$$

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=1-\cos\theta\\&=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}\\&=\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}\\&=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}.\end{aligned}$$

取 $\delta = \max(|ax_0|, |by_0|, |cz_0|)$

$= \max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|)$,

则 $\delta \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \leqslant \sqrt{3}\delta$.

于是当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \to +\infty$ 时,$\delta \to +\infty$,

令 $q = \max(|m|, |n|, |p|)$,则下述不等式显然成立,

$$0 \leqslant \sin^2\theta = \frac{(n\alpha - m\beta)^2 + (p\alpha - m\gamma)^2 + (p\beta - n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$\leqslant \frac{(2q\delta)^2 + (2q\delta)^2 + (2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2 - 6\delta q - 3q^2)}$$

$$= \frac{12q^2}{\delta^2 - 6\delta q - 3q^2} \to 0(\delta \to +\infty).$$

于是,当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \to +\infty$ 时,$\sin^2\theta \to 0$ 也就是当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \to \infty$,有 $\theta \to 0$.

【3350】 设 $u = f(x,y,z)$ 是可微分二次的函数,若 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\right)\cos\alpha$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos\gamma\right)\cos\gamma$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha.$$

【3351】 设 $u = f(x,y,z)$ 是可微分二次的函数及

$\boldsymbol{l}_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$,$\boldsymbol{l}_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\}$,

$\boldsymbol{l}_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$

是三个相互垂直的方向. 证明:

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 (1) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2$

$$\begin{aligned}&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i\\&\quad+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i\\&\quad+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i.\end{aligned}\tag{①}$$

由 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3$ 是互相垂直的单位矢量,有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cdot\cos\beta_i=0,\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cdot\cos\gamma_i=0,\\&\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cdot\cos\alpha_i=0,\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1,\\&\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i=1,\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i=1.\end{aligned}\tag{②}$$

将 ② 式中各等式代入 ① 式有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

(2) 由 3350 题的结论有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i\\&\quad+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i\end{aligned}$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i. \quad ③$$

把 ② 式各等式代入 ③ 式有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

【3352】 设 $u=u(x,y)$ 是可微函数且当 $y=x^2$ 时有 $u(x,y)=1$ 及 $\frac{\partial u}{\partial x}=x$. 当 $y=x^2$ 时,求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x,x^2)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

由题设当

$$y=x^2,u(x,y)=u(x,x^2)=1,$$

于是 $\frac{\mathrm{d}u(x,x^2)}{\mathrm{d}x}=0.$

且 $\frac{\partial u}{\partial x}=x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,$

于是有 $x+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

从而 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2},(x\neq 0).$

【3353】 设函数 $u=u(x,y)$ 满足如下方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

及下列条件:$u(x,2x)=x,u'_x(x,2x)=x^2$.

求出 $u''_{xx}(x,2x),u''_{xy}(x,2x),u''_{yy}(x,2x)$.

解 由

$$u(x,2x)=x,$$

有 $u'_x(x,2x)+2u'_y(x,2x)=1. \quad ①$

又由 $u'_x(x,2x)=x^2,$

于是由 ① 式有

$$u'_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}.\qquad ②$$

求 ② 式两端关于 x 的导数,有

$$u''_{yx}(x,2x)+2u''_{yy}(x,2x)=-x,\qquad ③$$

对 $\quad u'_x(x,2x)=x^2,$

两端关于 x 求导有

$$u''_{xx}(x,2x)+2u''_{xy}(x,2x)=2x.\qquad ④$$

根据 ③,④ 和 $u''_{xx}=u''_{yy}$,有

$$u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,$$

$$u''_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

假定 $z=z(x,y)$,解下列方程(3354 ~ 3356).

【3354】 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi(y),z=x\varphi(y)+\psi(y).$

【3355】 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi_1(x),$

$$z=\int_0^x\varphi_1(t)\mathrm{d}t+\psi(y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

【3356】 $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}=0.$

解 $\dfrac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}=\varphi_{n-1}(x),$

$$\frac{\partial^{n-2} z}{\partial y^{n-2}}=y\varphi_{n-1}(x)+\varphi_{n-2}(x),$$

累次积分 n 次有

$$z=y^{n-1}\tilde{\varphi}_{n-1}(x)+y^{n-2}\tilde{\varphi}_{n-2}(x)+\cdots+y\tilde{\varphi}_1(x)+\tilde{\varphi}_0(x).$$

【3357】 设 $u=u(x,y,z)$,解方程:$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0.$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \varphi_1(x,y)$,

$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2(x,y) + \psi_1(x,z)$,

$u = \varphi(x,y) + \psi(x,z) + \chi(y,z)$.

【3358】 求出方程$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$满足条件$z(x,x^2) = 1$的解 $z = z(x,y)$.

解 由$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$,

有　$z = x^2y + y^2 + \varphi(x)$.

又由　$z(x,x^2) = 1$,

有　$1 = x^4 + x^4 + \varphi(x)$.

从而　$\varphi(x) = 1 - 2x^4$.

于是　$z = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$.

【3359】 求出方程$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$满足条件$z(x,0) = 1, z'_y(x,0) = x$的解$z = z(x,y)$.

解 由$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$,

有　$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \varphi(x)$.

又由　$z'_y(x,0) = x$,

知　$x = 0 + \varphi(x)$,

即　$x = \varphi(x)$.

于是　$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x$,

因此,我们有$z = y^2 + xy + \varphi_1(x)$.

又由　$z(x,0) = 1$,

有　$1 = 0 + 0 + \varphi_1(x)$,

即　$\varphi_1(x) = 1$.

故我们有$z = 1 + xy + y^2$.

【3360】 求出方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$满足条件$z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$的解$z=z(x,y)$.

解 由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，

有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x),$$
$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).$$

由 $z(x,0)=x,z(0,y)=y^2$，

有 $x=\varphi(x)+\psi(0),y^2=\varphi(0)+\psi(y)$.

于是
$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)],$$

又 $z(0,0)=0$，

故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$.

因此
$$z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y).$$

§3. 隐函数的微分

1. **存在定理** 若(1) 函数$F(x,y,z)$在某点$\hat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$为零;(2) $F(x,y,z)$和$F'_z(x,y,z)$在$\hat{A}_0$点的邻域有定义且是连续的;(3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则在$A_0(x_0,y_0)$点某个充分小的邻域存在唯一的单值连续函数:
$$z=f(x,y) \tag{1}$$
满足方程$F(x,y,z)=0$,且$z_0=f(x_0,y_0)$.

2. **隐函数的可微分性** 除上述条件之外，若(4) 函数$F(x,y,z)$在$\hat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$点的邻域内可微分，则函数①在$A_0(x_0,y_0)$点的邻域可微分，且它的导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$可从以下方程求得:
$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

若函数 $F(x,y,z)$ 可进行足够次数的微分，则对等式 ② 用逐次微分法还可以计算函数 z 的高阶导数.

3. **由方程组定义的隐函数** 设函数 $F_i(x_1\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足以下条件：

(1) 在 $\hat{A}_0(x_{10},\cdots x_{m0};y_{10}\cdots,y_{n0})$ 点变为零；

(2) 在 $\hat{A}_0$ 点的邻域可微分；

(3) 在 $\hat{A}_0$ 点函数行列式$\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$.

在这样的情况下，方程组：

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)=0(i=1,2,\cdots,n) \qquad ③$$

在 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$ 点的某个邻域可惟一确定可微分函数组

$$y_i=f(x_i,\cdots,x_m) \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

满足方程 ③ 及以下条件：

$$f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0} \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

这些隐函数的微分可从下式求得：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$ [①]

【3361】 证明：在每一个点上都不连续的狄利克雷函数.

$$y=\begin{cases}1,\text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0,\text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

满足方程式：$y^2-y=0$.

证 当 x 为有理数时，$y^2-y=1-1=0$，当 x 为无理数时，$y^2-y=0-0=0$，因此，不论 x 为何实数时，皆有 $y^2-y=0$.

【3362】 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间有定义，在什么情况下方程 $\quad f(x)y=0$，

在 $a<x<b$ 时具有唯一连续解 $y=0$.

解 设函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a,b) 内是处处稠

---

① 在编写这一章的大量习题时，无条件地假定，隐函数及其相应的导数的存在条件成立.

密的,即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a,b) 的任意一个子区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$,则方程 $f(x)y=0$ 有唯一连续的解 $y=0$. 事实上,设 $y=y(x)$ 为方程 $f(x)y=0$ 的一个连续解,$x_0\in(a,b)$,则

1° 当 $f(x_0)\neq 0$ 时,显然 $y(x_0)=0$,

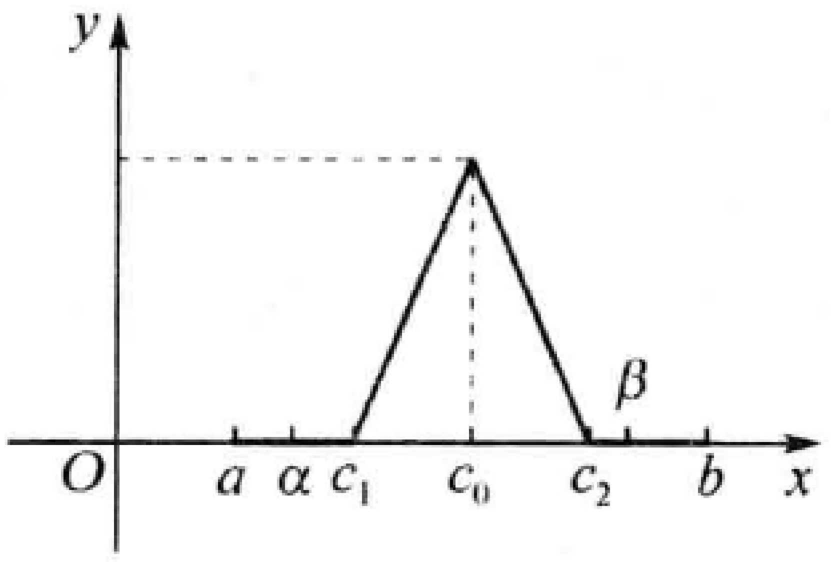
2° 当 $f(x_0)=0$,由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知:存在叙列 $\{x_n\}$,满足 $x_n\to x_0$ 及 $f(x_n)\neq 0$,$n=1,2,\cdots$,于是 $y(x_n)=0$,由 $y(x)$ 的连续性有

$$y(x_0)=y(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}y(x_n)=0.$$

从而,当 $a<x<b$ 时,$y=0$,反之,若 $f(x)y=0$,在 (a,b) 上只有唯一的连续解 $y=0$,则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a,b) 的任何子区间. 事实上,设在 (a,b) 的某子区间 (α,β) 上 $f(x)=0$,定义 (a,b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下

$$y_0(x)=\begin{cases}0, & a<x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4},\\ \dfrac{4}{\beta-\alpha}\left(x-\alpha-\dfrac{\beta-\alpha}{4}\right), & \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2},\\ -\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}\right], & \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x\leqslant\alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha),\\ 0, & \alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)<x<b.\end{cases}$$

如 3362 题图所示



3362 题图

图中

$$c_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4},c_0=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$c_2=\alpha+\frac{3(\beta-\alpha)}{4}.$$

显然 $y_0(x)\not\equiv 0$,但 $y=y_0(x)$ 是方程 $f(x)y=0$ 在(a,b) 上的一个连续解.

【3363】 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在(a,b) 区间有定义且连续,在什么情况下方程 $f(x)y=g(x)$ 在(a,b) 区间具有唯一连续解?

解 下面三个条件是必要的:

1° $f(x)$ 的零点必须是 $g(x)$ 的零点,否则 y 无解.

2° $f(x)$ 的非零点集合必须在(a,b) 内稠密,否则,存在$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$,当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时,恒有 $f(x)=g(x)=0$,从而当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时,任意改变原方程一个连续解 $y(x)$ 的函数值(但保持连续性)就得出原方程的另一个连续解,这与原方程连续解的唯一性矛盾.

3° 若 $f(x_0)=0$,则对任一点列 $x_n\to x_0$,$f(x_n)\neq 0(n=1,2,\cdots)$,皆有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0$($y_0$ 是有限数且只与 x_0 有关).

显然,如果上述极限不存在或对不同的序列取不同的值均导致 y 不连续. 反之,各上述三个条件满足,则可以证明原方程的连续解存在唯一. 事实上,这时令

$$y_0(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{f(x)}, & \text{在 } f(x)\neq 0 \text{ 的点},\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(x_n)}{f(x_n)}, & \text{在 } f(x)=0 \text{ 的点}.\end{cases}$$

其中取 $x_n\to x$,$f(x_n)\neq 0$,$n=1,2\cdots$,

显然 $y_0(x)$ 是(a,b) 内的连续函数且满足原方程,若原方程在(a,b) 内还有一连续解 $y=y_1(x)$,则

$$f(x)y_1(x)=g(x),f(x)y_0(x)=g(x)(a<x<b).$$

对 任意 $x_0\in(a,b)$,

若 $f(x_0)\neq 0$,

则 $$y_1(x_0)=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}=y_0(x_0),$$

若 $f(x_0)=0$,

取 $x_n\to x_0, f(x_n)\neq 0, n=1,2\cdots,$

则根据 $y_1(x)$ 的连续性,有

$$y_1(x_0)=\lim_{n\to\infty}y_1(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{f(x_n)}=y_0(x_0).$$

于是 $y_1(x)=y_0(x), x\in(a,b).$

唯一性得证.

【3364】 设给定方程式

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$

且 $$y=y(x)\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1), \tag{2}$$

是满足方程式 ① 的单值函数,

(1) 问有几个单值函数 ② 满足方程式 ①?

(2) 问有几个单值连续函数 ② 满足方程式 ①?

(3) 若(a) $y(0)=1$; (b) $y(1)=0$ 问有几个单值连续函数 ② 满足方程式 ①?

解 (1) 无限个,如令

$$y_n(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\text{且 } x\neq\dfrac{1}{n}\\ -\sqrt{1-x^2}, & x=\dfrac{1}{n}, n=1,2,3\cdots.\end{cases}$$

显然 $y=y_n(x), n=1,2,3,\cdots$, 都是满足方程 ① 的单值函数.

(2) 二个: $y=-\sqrt{1-x^2}, y=\sqrt{1-x^2}$.

(3) 1° 满足条件 $y(0)=1$ 的,只有 $y=\sqrt{1-x^2}$ 这一个连续函数.

2° 满足条件 $y(1)=0$ 的,有 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{1-x^2}$ 这二个连续函数.

【3365】 设给定方程式

$$x^2 = y^2,\qquad ①$$

且 $$y = y(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),\qquad ②$$

是满足方程式 ① 的单值函数，

(1) 有几个单值函数 ② 满足方程式 ①?

(2) 有几个单值连续函数 ② 满足方程式 ①?

(3) 有几个单值微分函数 ② 满足方程式 ①?

(4) 若:a) $y(1) = 1$; b) $y(0) = 0$ 有几个单值连续函数 ② 满足方程式 ①?

(5) 若 $y(1) = 1$;δ 足够小,问有几个单值连续函数

$$y = y(x)(1-\delta < x < 1+\delta),$$

满足方程式 ①?

解 (1) 无限个,如

$$y_n(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq \dfrac{1}{n}, \\ -|x|, & x \neq \dfrac{1}{n}, \end{cases} \qquad n = 1,2\cdots.$$

(2) 四个:$y = -x, y = x, y = |x|$ 和 $y = -|x|$.

(3) 二个:$y = -x$,和 $y = x$.

(4) (a) 二个: $y = x$ 和 $y = |x|$,(b) 四个:即(2) 中的四个.

(5) 一个:$y = x$.

【3366】 方程式

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

定义 y 为 x 的多值函数. 这个函数在什么样的域内(1) 单值;(2) 有两个值;(3) 有三个值;(4) 有四个值?求这个函数的分枝点及其单值连续分枝.

解 由 $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$,

得 $$y^4 - y^2 + (x^4 - x^2) = 0,$$

于是 $$y^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}.$$

一共有单值连续的六支,其中当

$$\frac{1}{4}+x^2-x^4\geqslant 0,$$

即 $\quad |x|\leqslant\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ 时,有二支

$$y_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\ |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

$$y_2=-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},\ |x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

当 $\quad 0\leqslant\dfrac{1}{4}+x^2-x^4\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^2;$

即 $\quad 1\leqslant x^2\leqslant\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时有四支:

$$y_3=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

$$y_4=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant -1.$$

$$y_5=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

$$y_6=-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}},-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\leqslant x\leqslant -1.$$

且(0,0)是孤立点,由上述六支的公共定义域知:

(1) 没有单值区域.

(2) 双值区域为 $0<|x|<1$ 及 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

(3) 三值区域为 $x=0$ 及 $x=\pm 1$.

(4) 四值区域为 $1<|x|<\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

枝点必要条件是

$$[y^4-y^2+(x^4-x^2)]'_y=0,$$

从而 $\quad 4y^3-2y=0,$

于是 $\quad y=0, y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

由 $y=0$,有 $x=0, x=\pm 1$.

由 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,有 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

经验证,得六个枝点:$(-1,0)$,$(1,0)$,$\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$\left(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$\left(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

【3367】 求由方程

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,$$

定义的多值函数 y 的分枝点和连续单值分枝

$$y=y(x) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

解 由

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,$$

有 $$y^2=\frac{-(1+2x^2)\pm\sqrt{8x^2+1}}{2}.$$

当 $|x|\leqslant 1$ 时,$\sqrt{8x^2+1}\geqslant 1+2x^2$,故单值连续的各枝为(共四枝)

$$y=\alpha(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(1+2x^2)}{2}}, -1\leqslant x\leqslant 1.$$

其中 $\alpha(x)$ 分别为 $1, -1, \operatorname{sgn}x, -\operatorname{sgn}x$.

又由$[(x^2+y^2)^2-x^2+y^2]'_y=2(x^2+y^2)\cdot 2y+2y=0$,有 $y=0$,于是有 $x=0, x=\pm 1$. 经验证枝点为$(0,0)$,$(1,0)$,$(-1,0)$.

【3368】 设 $f(x)$ 当 $a<x<b$ 时是连续的,而 $\varphi(y)$ 当 $c<y<d$ 时是单调递增且连续的,在什么情况下方程 $\varphi(y)=f(x)$ 可定义出单值函数 $y=\varphi^{-1}[f(x)]$?

研究下题：

(1) $\sin y+\operatorname{sh} y=x$；

(2) $\mathrm{e}^{-y}=-\sin^2 x$.

解 由 $\varphi(y)$ 的严格增加及 $\varphi(y)$，$f(x)$ 的连续性可知，若存在(x_0,y_0)，使得 $\varphi(y_0)=f(x_0)$，则在 x_0 近旁由方程 $\varphi(y)=f(x)$ 可唯一地确定 y 为 x 的单值连续函数

$$y=\varphi^{-1}[f(x)](\text{满足 } y_0=\varphi^{-1}[f(x_0)]), \tag{①}$$

若设满足不等式

$$\lim_{y\to c+0}\varphi(y)<f(x)<\lim_{y\to d-0}\varphi(y), x\in(a,b), \tag{②}$$

则函数 ① 是整个 $a<x<b$ 上定义的连续函数.

1° 设

$$\varphi(y)=\sin y+\operatorname{sh} y, -\infty<y+\infty.$$
$$f(x)=x, x\in(-\infty,+\infty).$$

由

$$\varphi'(y)=\cos y+\operatorname{ch} y>0, y\in(-\infty,+\infty),$$

故 $\varphi(y)$ 是 $-\infty<y+\infty$，上严格增函数，又

$$\lim_{y\to-\infty}\varphi(y)=-\infty, \lim_{y\to+\infty}\varphi(y)=+\infty,$$

因而不等式(2) 满足，于是，由方程 $\sin y+\operatorname{sh} y=x$ 唯一确定 y 为 x 的连续函数，它定义在整个数轴：$-\infty<x<+\infty$ 上.

2° $\varphi(y)=\mathrm{e}^{-y}$，

及 $f(x)=-\sin^2 x$，

满足题设条件，但由

$$\mathrm{e}^{-y}>0, -\sin^2 x\leqslant 0,$$

知，不存在点(x_0,y_0)，使得

$$\mathrm{e}^{-y_0}=-\sin^2 x_0,$$

因此，不能定义 y 为 x 的单值函数.

【3369】 设

$$x=y+\varphi(y), \tag{①}$$

其中 $\varphi(0)=0$ 且当 $-a<y<a$ 时，$\varphi'(y)$ 连续并满足：$|\varphi'(y)|\leqslant$

$k < 1$.

证明：当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时，存在惟一的可微函数 $y = y(x)$，满足方程 ①，且 $y(0) = 0$.

证　设

$$F(x, y) = x - y - \varphi(y),$$

于是

1°　由 $\varphi(0) = 0$ 有，$F(0,0) = 0$.

2°　当 $x \in (-\infty, +\infty)$，$y \in (-a, a)$ 时，$F(x,y)$，$F'_x(x, y)$ 及 $F'_y(x,y) = -1 - \varphi'(y)$ 皆连续.

3°　$F'_y(0,0) = -1 - \varphi'(0) < 0$，$F'_y(0,0) \neq 0$，

于是，由隐函数的存在及可微性定理知：存在 $\varepsilon > 0$，当 $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，存在唯一的可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$x = y + \varphi(y),$$

及
$$y(0) = 0.$$

【3370】　设 $y = y(x)$ 是用以下方程定义的隐函数：

$$x = ky + \varphi(y)$$

其中常数 $k \neq 0$ 且 $\varphi(y)$ 是周期为 ω 的可微分周期函数，且 $|\varphi'(y)| < |k|$. 证明

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 周期为 $|k|\omega$ 的周期函数.

证　由 $x = ky + \varphi(y)$，

知
$$\frac{\partial x}{\partial y} = k + \varphi'(y).$$

又
$$|\varphi'(y)| < |k|,$$

故 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 与 k 同号，即 x 为 y 的严格单调函数，且是连续的，由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 w 为周期的函数，故有界，从而当 $k > 0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty} x = -\infty,\ \lim_{y\to+\infty} x = +\infty,$$

当 $k < 0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty} x=+\infty,\ \lim_{y\to+\infty} x=-\infty.$$

由此知，反函数 $y=y(x)$ 存在唯一，且为$(-\infty+\infty)$ 上定义的严格单调可微函数，令

$$y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x),x\in(-\infty,+\infty), \qquad ①$$

则由 $\quad x=ky(x)+\varphi[y(x)],\varphi[y(x)+w]=\varphi[y(x)]$,

知 $\quad x+kw=ky(x)+\varphi[y(x)]+kw$

$$=k[y(x)+w]+\varphi[y(x)+w],$$

从而由反函数的唯一性有

$$y(x+kw)=y(x)+w,x\in(-\infty,+\infty). \qquad ②$$

由 ① 式与 ② 式有

$$\psi(x+kw)=y(x+k\varphi)-\frac{x+kw}{k}$$

$$=y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x),x\in(-\infty+\infty).$$

同理有 $\quad \psi(x-kw)=\psi(x),x\in(-\infty,+\infty)$.

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|w$ 为周期的可微周期函数，由 ① 得

$$y=y(x)=\frac{1}{k}x+\psi(x).$$

求由下列各式所定义的函数 y 的 y' 及 y''(3371 ~ 3375).

【3371】 $x^2+2xy-y^2=a^2$.

解 等式两边对 x 求导有

$$2x+2y+2xy'-2yy'=0.$$

故 $\quad y'=\dfrac{y+x}{y-x}$.

对上式求导数有

$$y''=\frac{(y-x)(y'+1)-(y+x)(y'-1)}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{2y-2xy'}{(y-x)^2}=\frac{2y(y-x)-2x(y+x)}{(y-x)^3}$$

$$=\frac{2(y^2-2xy-x^2)}{(y-x)^3}=-\frac{2a^2}{(y-x)^3}$$

$$= \frac{2a^2}{(x-y)^3}.$$

【3372】 $\ln \sqrt{x^2+y^2} = \arctan \frac{y}{x}$.

解 等式两端对 x 求导有

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2}.$$

于是 $$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

将上式对 x 求导有

$$y'' = \frac{(x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2} = \frac{2x(x+y)-2y(x-y)}{(x-y)^3}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

【3373】 $y-\varepsilon\sin y = x \quad (0<\varepsilon<1)$.

解 等式两端对 x 求导数有

$$y'-\varepsilon y'\cos y = 1,$$

于是 $$y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

将上式再对 x 求导有

$$y'' = -\frac{\varepsilon y'\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^2} = -\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}.$$

【3374】 $x^y = y^x \quad (x \neq y)$.

解 两边取对数

$$y\ln x = x\ln y,$$

即 $$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}, \qquad x>0, \qquad y>0.$$

对上式两端关于 x 求导数有

$$\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{y'(1-\ln y)}{y^2},$$

于是 $$y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}.$$

将上式对 x 求导数有

$$y'' = \frac{1}{x^4(1-\ln y)^2}\left\{x^2(1-\ln y)\left[2yy'(1-\ln x) - \frac{y^2}{x}\right]\right.$$

$$\left. - y^2(1-\ln x)\left[2x - 2x\ln y - \frac{x^2y'}{y}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{x^4(1-\ln y)^3}\{y^2[y(1-\ln x)^2$$

$$- 2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2]\}.$$

【3375】 $y = 2x\arctan\frac{y}{x}$.

解 由 $\frac{y}{x} = 2\arctan\frac{y}{x}$,

两端微分有

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

于是 $$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

即 $$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

故有 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

将上式对 x 求导,有

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0.$$

【3376】 证明:当 $1 + xy = k(x-y)$ 时(其中 k 为常数),成立等式 $\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$.

证 将等式

$$1+xy=k(x-y)$$

两端微分，有

$$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=k(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y),$$

于是 $$(x-y)(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)=k(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=(1+xy)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y),$$

化简有 $$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2},$$

【3377】 若 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$，则当 $xy>0$ 时，成立等式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0$.

证 将所给等式两端微分，有

$$2xy^2\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0,$$

于是 $$x(y^2+1)\mathrm{d}x+y(x^2+1)\mathrm{d}y=0. \qquad ①$$

又由 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$，有

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \qquad ②$$

由 $xy>0$，知 x，y 应为同号，把 ② 式代入 ① 式后，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

【3378】 证明：方程

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a\neq0),$$

在 $x=0$，$y=0$ 点的邻域定义两个微分函数：$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y'_1(0)$ 和 $y'_2(0)$.

证 由 $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$，

有 $$y^4+(2x^2+a^2)y^2-(a^2x^2-x^4)=0.$$

于是 $$y^2=\frac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}}{2}.$$

令 $$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}=\pm f(x^2).$$

易知(0,0) 为枝点，从(0,0) 出发，有单值连续的四个分枝：

$$y_1 = f(x^2), 0 \leqslant x \leqslant \delta,$$
$$y_2 = f(x^2), -\delta \leqslant x \leqslant 0,$$
$$y_3 = -f(x^2), 0 \leqslant x \leqslant \delta,$$
$$y_4 = -f(x^2), -\delta \leqslant x \leqslant 0.$$

这几个单值分枝能否组成$(-\delta,\delta)$上的可微函数,主要看组成的函数在$x=0$是否可微,为此,研究各分枝在点$x=0$处的单侧导数.

$$\begin{aligned} y'_{1+}(0) &= \lim_{x\to+0}\frac{y_1(x)-y_1(0)}{x-0} = \lim_{x\to+0}\frac{f(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}} \\ &= \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2x^2}} \\ &= \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{8a^2x^2+a^4-(2x^2+a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}} \\ &= \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{4a^2-4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}} = 1. \end{aligned}$$

同理有 $$y'_{2-}(0) = \lim_{x\to-0}\frac{f(x^2)}{x} = -1,$$

$$y'_{3^-}(0) = \lim_{x\to+0}\frac{-f(x^2)}{x} = -1,$$

$$y'_{4^-}(0) = \lim_{x\to-0}\frac{-f(x^2)}{x} = 1.$$

于是 $$\beta_1(x) = \begin{cases} f(x^2), 0 \leqslant x < \delta, \\ -f(x^2), -\delta < x < 0. \end{cases}$$

$$\beta_2(x) = \begin{cases} -f(x^2), 0 \leqslant x < \delta, \\ f(x^2), -\delta < x < 0. \end{cases}$$

是仅有的两个过点(0,0)的可微函数,且

$$\beta'_1(0) = 1, \qquad \beta'_2(0) = -1.$$

【3379】 若
$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3,$$
求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

解 由
$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3,$$
有
$$x^4+(2y^2-3y)x^2+y^4+y^3=0,$$
于是
$$x^2=\frac{(3y-2y^2)\pm\sqrt{9y^2-16y^3}}{2}.$$
令
$$g(y)=\frac{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}{2},$$
$$h(y)=\frac{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}{2}.$$
易验证:在 $y=0$ 的邻域内皆有 $g(y)\geqslant 0$,且仅当 $y\geqslant 0$ 时才有 $h(y)\geqslant 0$. 于是,点 $(0,0)$ 为枝点,从该点出发,有六个单值连续枝:

1. $x_1=\sqrt{g(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$,它在 $0\leqslant x\leqslant\delta$ 上定义隐函数 $y=f_1(x)$.

2. $x_2=-\sqrt{g(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$,它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_2(x)$.

3. $x_3=\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon<y\leqslant 0$,它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_3(x)$.

4. $x_4=-\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon<y\leqslant 0$,它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_4(x)$.

5. $x_5=\sqrt{h(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$,它在 $0\leqslant x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_5(x)$.

6. $x_6=-\sqrt{h(y)}$, $0\leqslant y<\varepsilon$,它在 $-\delta<x\leqslant 0$ 上定义隐函数 $y=f_6(x)$.

易知,对右端 y 的表达式求导数,有导数不为零,于是上述隐函数存在,因此,只要求上述六枝在原点的单侧导数.

$$f'_{1+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y}{3-2y+\sqrt{9-16y}}}=0.$$

$$f'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}=0.$$

$$f'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{y\to-0}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}=\lim_{z\to+0}\frac{-z}{\sqrt{g(-z)}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2}{\sqrt{9z^2+16z^3}-3z-2z^2}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2z^2(\sqrt{9z^2+16z^3}+3z+2z^2)}{(9z^2+16z^3)-(3z+2z^2)^2}}$$

$$=-\lim_{z\to+0}\sqrt{\frac{2(\sqrt{9+16z}+3+2z)}{4-4z}}=-\sqrt{3}.$$

$$f'_{4-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_4(x)}{x}=\lim_{y\to-0}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}$$

$$=-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}.$$

$$f'_{5+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f_5(x)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{h(y)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2y^2(3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3})}{(3y-2y^2)^2-(9y^2-16y^3)}}$$

$$=\lim_{y\to+0}\sqrt{\frac{2(3-2y+\sqrt{9-16y})}{4+4y}}=\sqrt{3}.$$

$$f'_{6-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f_6(x)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{h(y)}}=-\sqrt{3}.$$

于是，上述六个单值连续枝可组成三个$(-\delta,\delta)$上的可微函数

$$y=y_i(x),\qquad i=1,2,3.$$

$$y_1(x)=\begin{cases}f_1(x),x\geqslant 0\\ f_2(x),x<0\end{cases},\qquad y'_1(0)=0,$$

$$y_2(x)=\begin{cases}f_3(x),x\geqslant 0\\ f_6(x),x<0\end{cases},\qquad y'_2(0)=-\sqrt{3},$$

$$y_3(x)=\begin{cases}f_5(x),x\geqslant 0\\ f_4(x),x<0\end{cases},\qquad y'_3(0)=\sqrt{3}.$$

【3380】 若$x^2+xy+y^2=3$，求y',y'',y'''.

解 对$x^2+xy+y^2=3$

两边关x求导有

$$2x+y+xy'+2yy'=0,$$

于是 $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$.

又对上式求导有

$$y''$$

$$=-\frac{1}{(x+2y)^2}\{(2+y')(x+2y)-(1+2y')(2x+y)\}$$

$$=-\frac{18}{(x+2y)^3}.$$

$$y'''=\frac{54}{(x+2y)^4}(1+2y')=-\frac{162x}{(x+2y)^5}.$$

【3381】 若$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$，求y',y'',y'''在$x=0,y=1$时的值.

解 对等式两边求关于x的导数，有

$$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0. \qquad ①$$

以 $x=0,y=1$,

代入①式得

$$y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0.$$

将①式再对 x 求导数，得

$$2-y'-y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0. \qquad ②$$

以 $x=0,y=1,y'=0$，

代入②式有

$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

将②式再对 x 求导数有

$$-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0. \qquad ③$$

以 $x=0,y=1,y'=0,y''=-\dfrac{2}{3}$，

代入③式有

$$y'''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{2}{3}.$$

【3382】 证明：对于二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

等式：$\dfrac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$ 成立.

证 由题意，二次曲线应是非退化的，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0.$$

由 $\Delta\neq 0$ 可保证 $y''\neq 0$，现对等式

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

两边关于 x 求导数有

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+2d+2ey'=0. \qquad ①$$

于是 $$y'=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

$\dfrac{1}{2}$ 乘①式后，对等式两边再求关于 x 的导数有

$$a+2by'+cy'^2+(bx+cy+\mathrm{e})y''=0.$$

于是 $y''=-\dfrac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+\mathrm{e}}$

$$=-\frac{1}{(bx+cy+\mathrm{e})^3}\{a(bx+cy+\mathrm{e})^2$$

$$-2b(bx+cy+\mathrm{e})(ax+by+\mathrm{d})+c(ax+by+\mathrm{d})^2\}$$

$$=\frac{\Delta}{(bx+cy+\mathrm{e})^3},$$

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot(bx+cy+\mathrm{e})^2$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[b^2x^2+c(cy^2+2bxy+2\mathrm{e}y)+\mathrm{e}^2+2b\mathrm{e}x]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[b^2x^2-c(ax^2+2\mathrm{d}x+f)+2b\mathrm{e}x+\mathrm{e}^2]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}\cdot[(b^2-ac)x^2+2(b\mathrm{e}-c\mathrm{d})x+\mathrm{e}^2-cf].$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式，于是

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0.$$

求函数 $z=z(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数，设(3383 ~ 3387).

【3383】 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解　对等式两边微分有

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0. \quad ①$$

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2+z\mathrm{d}^2z=0. \quad ②$$

由 ① 有

$$\mathrm{d}z=-\frac{x}{z}\mathrm{d}x-\frac{y}{z}\mathrm{d}y,$$

于是　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}.$

由 ② 有

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{z}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)$$

$$=-\frac{1}{z}\mathrm{d}x^2-\frac{1}{z}\mathrm{d}y^2-\frac{1}{z}\left(\frac{x}{z}\mathrm{d}x+\frac{y}{z}\mathrm{d}y\right)^2$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}x^2-\frac{2xy}{z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{z}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)\mathrm{d}y^2,$$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

【3384】 $z^3-3xyz=a^3$.

解 等式两边对 x 求偏导有

$$2z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{①}$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}.$$

同理 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

① 式除以 3 后再分别对 x 及 y 求偏导数有

$$2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-xy)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入上述两式有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

同法有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}.$$

【3385】 $x+y+z=\mathrm{e}^z$.

解 等式两端微分有

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\mathrm{e}^z\mathrm{d}z, \tag{①}$$

即 $$\mathrm{d}z=\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\frac{1}{x+y+z-1}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}.$$

再将①式微分一次有

$$d^2z=e^z d^2z+e^z dz^2,$$

故有 $$d^2z=-\frac{e^z}{e^z-1}(dz)^2=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2).$$

于是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

$$=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

【3386】 $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}.$

解 设

$$r=\sqrt{x^2-y^2},$$

则 $$\frac{z}{r}=\tan\frac{z}{r},$$

$$d\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}.$$

从而有 $$d\left(\frac{z}{r}\right)=0,$$

或 $$rdz-zdr=0.$$

即 $$dz=\frac{z}{r^2}(xdx-ydy). \qquad ①$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zx}{r^2}=\frac{xz}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{r^2}=-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

由①得

$$(x^2-y^2)dz=xz\,dx-yz\,dy. \qquad ②$$

②式再微分一次有

$$\begin{aligned}
&(x^2-y^2)\mathrm{d}^2z\\
&=-(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x^2-y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y^2\\
&=-(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y)\left[\frac{z(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y)}{x^2-y^2}\right]+z\mathrm{d}x^2-z\mathrm{d}y^2\\
&=\frac{z}{x^2-y^2}[-x^2\mathrm{d}x^2+2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}y^2+(x^2-y^2)\mathrm{d}x^2\\
&\quad-(x^2-y^2)\mathrm{d}y^2]\\
&=\frac{z(-y^2\mathrm{d}x^2+2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}y^2)}{x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

于是
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}.$$

【3387】 $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$.

解 等式两端对 x 求偏导数有

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}\cdot\left(-1-\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=-1$. 利用对称性有$\frac{\partial z}{\partial y}=-1$，显见

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

【3388】 设 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ ①

及 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，求 $f'_x(1,1,1)$，若

(1) 若 $z=z(x,y)$ 是方程式 ① 定义的隐函数，

(2) 若 $y=y(x,z)$ 是方程式 ① 定义的隐函数.

说明为什么这些导数有差别?

解 (1) 令

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz=0,$$

则由方程 ① 所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导 $z'_x(x,y)$ 在(1，1) 点的值为

$$z'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\big|_{x=1}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(1,1,z)\big|_{z=1}}$$

$$=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+2-3x)\big|_{x=1}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(2+z^2-3z)\big|_{z=1}}=-1.$$

从而 $$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\Big|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\Big|_{x=1}+\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,z)\Big|_{z=1}\cdot z'_x(1,1)$$

$$=1+3\cdot(-1)=-2.$$

(2) $$y'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\Big|_{x=1}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(1,y,1)\Big|_{y=1}}=-1.$$

于是 $$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z),z)]\Big|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\Big|_{x=1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y,1)\Big|_{y=1}\cdot y'_x(1,1)$$

$$=1\cdot 2(-1)=-1.$$

由①与②所得的对 x 的偏导数在 $(1,1,1)$ 点的值不相等，方程 $F(x,y,z)=0$ 代表一个空间曲面，而 $f(x,y,z)$ 表示定义在这曲面上的一个函数，函数 $G(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后，原曲面上的函数看成在 xOy 平面上定义的一个函数，$G'_x(x,y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份，同样地，$H(x,z)=f(x,y(x,z),z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后，原曲面上的函数看成 Oxz 平面上定义的函数，$H'_x(x,z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部分，一般地，原来函数

在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部分是不相等的.

【3389】 若 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在 $x=1$,$y=-2$,$z=1$ 时的值.

解 对等式两边微分一次有

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x-\mathrm{d}z=0.$$

于是

$$(1-6z)\mathrm{d}z=(2x+y)\mathrm{d}x+(4y+x)\mathrm{d}y. \qquad ①$$

再微分一次有

$$(1-6z)\mathrm{d}^2z=6\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4\mathrm{d}y^2. \qquad ②$$

把

$$x=1,y=-2,z=1,$$

代入 ① 式有

$$\mathrm{d}z=\frac{7}{5}\mathrm{d}y.$$

把 $z=1,\mathrm{d}z=\dfrac{7}{5}\mathrm{d}y$,

代入 ② 式有

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{2}{5}\mathrm{d}x^2-\frac{2}{5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{394}{125}\mathrm{d}y^2.$$

于是,当 $x=1,y=-2,z=1$ 时,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{5},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}.$$

求 dz 和 d²z,设(3390 ~ 3393).

【3390】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

解 等式两端微分一次有

$$\frac{2x}{a^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{b^2}\mathrm{d}y+\frac{2z}{c^2}\mathrm{d}z=0,$$

于是 $$\mathrm{d}z=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\mathrm{d}y}{b^2}\right).$$

再将 dz 微分一次有

$$d^2z=-\frac{c^2}{z^2}\left[z\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}\right)-\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}\right)dz\right]$$

$$=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right].$$

【3391】 $xyz=x+y+z.$

解 把等式两边微分一次有

$$yzdx+xzdy+xydz=dx+dy+dz, \quad ①$$

于是 $$dz=-\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}. \quad ②$$

对 ① 式再微分一次有

$$2zdxdy+2xdydz+2ydxdz+xyd^2z=d^2z. \quad ③$$

把 ② 式代入 ③ 式，化简后得

$$d^2z=-\frac{2}{(1-xy)^2}\{y(1-yz)dx^2$$

$$+[x+y-z(1+xy)]dxdy+x(1-xz)dy^2\}$$

$$=-\frac{2\{y(1-yz)dx^2-2zdxdy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

【3392】 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1.$

解 等式两端微分一次有

$$\frac{zdx-xdz}{z^2}=\frac{dz}{z}-\frac{dy}{y},$$

于是 $$dz=\frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}.$$

对 $$(x+z)dz=zdx+\frac{z^2}{y}dy$$

再微分一次有

$$(x+z)d^2z$$

$$=-(dx+dz)dz+dzdx+\frac{2z}{y}dzdy-\frac{z^2}{y^2}dy^2$$

$$=-dz^2+\frac{2z}{y}dydz-\frac{z^2}{y^2}dy^2=-\left(dz-\frac{z}{y}dy\right)^2$$

$$=-\frac{z^2[(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y)-(x+z)\mathrm{d}y]^2}{y^2(x+z)^2}$$

$$=-\frac{z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{y^2(x+z)^2}.$$

于是 $$\mathrm{d}^2z=-\frac{z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

【3393】 $z=x+\arctan\dfrac{y}{z-x}$

解 等式两边微分一次有

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{(z-x)^2}}\cdot\frac{(z-x)\mathrm{d}y-y(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)}{(z-x)^2}.$$

化简有 $$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\frac{z-x}{(z-x)^2+y(y+1)}\mathrm{d}y.$$

对上式微分一次有

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{[(z-x)^2+y(y+1)]^2}\{[(z-x)^2+y(y+1)]\mathrm{d}y\cdot(\mathrm{d}z-\mathrm{d}z)-(z-x)\mathrm{d}y\cdot[2(z-x)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}y]\}.$$

将 $\mathrm{d}z$ 代入化简有

$$\mathrm{d}^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}\mathrm{d}y^2.$$

【3394】若 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$，求 $\mathrm{d}u$.

解 把等式两边微分有

$$3u^2\mathrm{d}u-3u^2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-6u(x+y)\mathrm{d}u+3z^2\mathrm{d}z=0.$$

于是 $$\mathrm{d}u=\frac{u^2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-z^2\mathrm{d}z}{u[u-2(x+y)]}.$$

【3395】若 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$，求$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$.

解 把等式两边对 x 求导有

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}.\qquad ①$$

同理 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1+2yF'_2}{F'_1+2zF'_2}.$$

对 ① 式两边求关于 y 的偏导数有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{1}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{(F'_1+2zF'_2)\cdot[(F'_1)'_y+2x(F'_2)'_y]\\&\quad-(F'_1+2xF'_2)\cdot[(F'_1)'_y+2z(F'_2)'_y+2z'_y\cdot F'_2]\}\\&=-\frac{1}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{2(x-z)F'_1\cdot(F'_2)'_y\\&\quad+2(z-x)F_2(F'_1)'_y-2[F'_1F'_2+x(F'_2)^2]z'_y\}\\&=-\frac{2(x-z)}{(F'_1+2zF'_2)^2}\{F'_1\cdot(F'_2)'_y-F'_2\cdot(F'_1)_y\}\\&\quad-\frac{2F'_2\cdot(F'_1+2xF'_2)\cdot(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.\end{aligned}$$

现分别求$(F'_1)'_y$及$(F'_2)'_y$

$$(F'_1)'_y=F''_{11}\cdot(1+z'_y)+F''_{12}\cdot(2y+2zz'_y),$$
$$(F'_2)'_y=F''_{21}\cdot(1+z'_y)+F''_{22}\cdot(2y+2zz'_y).$$

又由 $$1+z'_y=\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1\cdot 2zF'_2},$$

$$2y+2zz'_y=\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2},$$

有 $$\begin{aligned}&F'_1\cdot(F'_2)'_y-F'_2\cdot(F'_1)'_y\\&=F'_1\cdot F''_{21}\cdot\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}+F'_1F''_{22}\cdot\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}\\&\quad-F'_2F''_{11}\cdot\frac{2(z-y)F'_2}{F'_1+2zF'_2}-F'_2F''_{12}\cdot\frac{2(y-z)F'_1}{F'_1+2zF'_2}\\&=\frac{2(y-z)}{F'_1+2zF'_2}\{(F'_1)^2F''_{22}-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}.\end{aligned}$$

于是 $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3}\{(F'_1)^2F''_{22}\\&\quad-2F'_1F'_2F''_{12}+(F'_2)^2F''_{11}\}\end{aligned}$$

$$-\frac{2F'_2\cdot(F'_1+2xF'_2)\cdot(F'_1+2yF'_2)}{(F'_1+2zF'_2)^3}.$$

【3396】 若 $F(x-y,\ y-z,z-x)=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　对等式两边求关于 x 的偏导数有

$$F'_1+F'_2\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_3\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_1-F'_3}{F'_2-F'_3}.$$

同理有 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_2-F'_1}{F'_2-F'_3}.$$

【3397】 若 $F(x,x+y,x+y+z)=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　对等式两边分别求关于 x 和 y 的偏导数有

$$F'_1+F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$F'_2+F'_3\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F'_2}{F'_3}\right).$$

现将$\dfrac{\partial z}{\partial x}$对 x 求偏导数有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^2}\left\{F'_3\cdot\left[F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right\}.$$

把$\dfrac{\partial z}{\partial x}$代入上式并化简有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^3}\{(F'_3)^2\cdot(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})$$
$$-2(F'_1+F'_2)F'_3\cdot(F''_{13}+F''_{23})$$
$$+(F'_1+F'_2)^2\cdot F''_{33}\}.$$

【3398】 若 $F(xz,\ yz)=0$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 对等式两边求关于 x 的偏导数有

$$F'_1 \cdot \left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_2 \cdot y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{zF'_1}{xF'_1 + yF'_2}.$$

现对$\frac{\partial z}{\partial x}$求关于 x 的偏导数有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(xF'_1 + yF'_2)^2}\Big\{&(xF'_1 + yF'_2) \cdot \Big[F'_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ &+ z\Big(F''_{11} \cdot \Big(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + F''_{12} y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big] \\ &- \Big[F'_1 + x\Big(F''_{11} \cdot \Big(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + F''_{12} y\frac{\partial z}{\partial x}\Big) \\ &+ y\Big(F''_{21} \cdot \Big(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + F''_{22} y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big]zF'_1\Big\}.\end{aligned}$$

把$\frac{\partial z}{\partial x}$代入上式化简有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(xF'_1 + yF'_2)^3}\{&y^2 z^2[(F'_1)^2 F''_{22} \\ &- 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11}] \\ &- 2z(F'_1)^2 \cdot (xF'_1 + yF'_2)\}.\end{aligned}$$

【3399】 若(1) $F(x+z, y+z) = 0$, (2) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$,求 $d^2 z$.

解 (1) 对等式两边微分有

$$F'_1 \cdot (dx + dz) + F'_2 \cdot (dy + dz) = 0, \qquad ①$$

于是

$$dz = -\frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{F'_1 + F'_2},$$

$$dx + dz = \frac{F'_2 \cdot (dx - dy)}{F'_1 + F'_2},$$

$$dy + dz = -\frac{F'_1 \cdot (dx - dy)}{F'_1 + F'_2}.$$

对 ① 式再求一次微分有

$$F''_{11}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)^2+2F''_{12}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$
$$+F''_{22}\cdot(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2+(F'_1+F'_2)\mathrm{d}^2z=0,$$

于是
$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{F'_1+F'_2}[F''_{11}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)^2$$
$$+2F''_{12}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+F''_{22}\cdot(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2]$$
$$=-\frac{1}{(F'_1+F'_2)^3}[F''_{11}\cdot(F'_2)^2-2F'_1F'_2F''_{12}$$
$$+F''_{22}\cdot(F'_1)^2](\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2.$$

(2) 对等式

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$$

两端求微分有

$$F'_1\cdot\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}+F'_2\cdot\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}=0, \qquad ②$$

于是
$$\mathrm{d}z=\frac{z(F'_1\mathrm{d}x+F'_2\mathrm{d}y)}{xF'_1+yF'_2},$$
$$z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z=\frac{zF'_2\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{xF'_1+yF'_2},$$
$$z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=-\frac{zF'_1\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)}{xF'_1+yF'_2}.$$

② 式乘以 z^2 后再微分一次有

$$F''_{11}\cdot\frac{(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)^2}{z^2}+2F''_{12}\cdot\frac{(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)}{z^2}$$
$$+F''_{22}\cdot\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2}{z^2}-(xF'_1+yF'_2)\mathrm{d}^2z=0,$$

于是
$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{z^2(xF'_1+yF'_2)}[F''_{11}\cdot(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)^2$$
$$+2F''_{12}(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)$$
$$+F''_{22}\cdot(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2]$$
$$=\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{(xF'_1+yF'_2)^3}[F''_{11}\cdot(F'_2)^2-2F'_1F'_2\cdot F''_{12}$$

$+F''_{22}\cdot(F'_1)^2]$.

【3399.1】 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-zx+y=0$ 定义的可微函数,且 $x=3$, $y=-2$ 时 $z=2$,求 $\mathrm{d}z(3,-2)$ 和 $\mathrm{d}^2z(3,-2)$.

解 对 $z^3-zx+y=0$

两边求微分有 $3z^2\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$, ①

于是 $$\mathrm{d}z=\frac{z\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{3z^2-x}.$$

从而 $$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=3\\y=-2\\z=2}}=\frac{2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{3\times4-3}=\frac{2}{9}\mathrm{d}x-\frac{1}{9}\mathrm{d}y.$$

对 ① 式两边再微分一次有

$$6z(\mathrm{d}z)^2+3z^2\mathrm{d}^2z-\mathrm{d}x\mathrm{d}z-x\mathrm{d}^2z-\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$$

于是 $$\mathrm{d}^2z=\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}z-6z(\mathrm{d}z)^2}{3z^2-x}.$$

从而

$$\mathrm{d}^2z\Big|_{\substack{z=2\\x=3\\y=-2}}=\frac{2\mathrm{d}x(\frac{2}{9}\mathrm{d}x-\frac{1}{9}\mathrm{d}y)-6\times2\cdot(\frac{2}{9}\mathrm{d}x-\frac{1}{9}\mathrm{d}y)^2}{3\times4-3}$$

$$=-\frac{4}{243}\mathrm{d}x^2+\frac{10}{243}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{4}{243}\mathrm{d}y^2.$$

【3400】 设 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 定义的函数,证明$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证 由隐函数求导法有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

于是 $$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

【3401】 若 $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.求解$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ 和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

解　对 z 求导数有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0,\\ 2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}+2z=0.\end{cases}$$

于是我们有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-z}{x-y},\frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}.$$

【3402】　若 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$，$x+y+z=2$. 求 $\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz},\frac{d^2x}{dz^2}$ 及 $\frac{d^2y}{dz^2}$ 在 $x=1,y=-1$，$z=2$ 时的值.

解　对 z 求导数有

$$\begin{cases}2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}=z, & ①\\ \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0. & ②\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(\dfrac{dx}{dz})^2+2x\dfrac{d^2x}{dz^2}+2(\dfrac{dy}{dz})^2+2\dfrac{d^2y}{dz^2}=1, & ③\\ \dfrac{d^2x}{dz^2}+\dfrac{d^2y}{dz^2}=0. & ④\end{cases}$$

将　$x=1,y=-1,z=2$,

代入 ①、② 有

$$\frac{dx}{dz}=0,\frac{dy}{dz}=-1.$$

把上述结论和 x,y,z 值及由 ④ 式决定的式子一起代入 ③ 式有

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4},\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

【3403】　若 $xu-yv=0$，$yu+xv=1$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解　微分有

$$\begin{cases}x du-y dv=v dy-u dx,\\ y du+x dv=-v dx-u dy.\end{cases}$$

于是 $$\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2+y^2}[-(xu+yv)\mathrm{d}x+(xv-yu)\mathrm{d}y],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}.$$

同理 $$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},x^2+y^2>0.$$

【3403.1】 可微分数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases}xe^{u+v}+2uv=1,\\ ye^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}=2x\end{cases}$$

所定义，且 $u(1,2)=0,v(1,2)=0$，求 $du(1,2)$ 和 $dv(1,2)$.

解 对方程组微分有

$$\begin{cases}(xe^{u+v}+2v)\mathrm{d}u+(xe^{u+v}+2u)\mathrm{d}v=-e^{u+v}\mathrm{d}x, & ①\\ (ye^{u-v}-\dfrac{1}{1+v})\mathrm{d}u+(\dfrac{u}{(1+v)^2}-ye^{u-v})\mathrm{d}v=2\mathrm{d}x-e^{u-v}\mathrm{d}y. & ②\end{cases}$$

把 $x=1,y=2,u(1,2)=0,v(1,2)=0$，

代入 ①，② 有

$$\begin{cases}\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=-\mathrm{d}x, & ③\\ \mathrm{d}u-2\mathrm{d}v=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y. & ④\end{cases}$$

于是由 ③—④ 有

$$\mathrm{d}v\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=-\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\mathrm{d}y.$$

由 ③×2+④ 有

$$\mathrm{d}u\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}y.$$

【3404】 若 $u+v=x+y,\dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}$. 求 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}^2u$ 及 d^2v.

解 由

$$\begin{cases}u+v=x+y,\\ y\sin u=x\sin v.\end{cases}$$

微分有

$$\begin{cases}du+dv=dx+dy, & ① \\ \sin u dy+y\cos u du=\sin v dx+x\cos v dv. & ②\end{cases}$$

于是

$$du=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)dx-(\sin u-x\cos v)dy],$$

$$dv=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)dx+(\sin u+y\cos u)dy].$$

对 ①,② 式再微分一次有

$$\begin{cases}d^2u+d^2v=0 \\ y\cos u\cdot d^2u+2\cos u dy du-y\sin u\cdot du^2 \\ =x\cos v d^2v+2\cos v dx dv-x\sin v dv^2.\end{cases}$$

从而 $$d^2u=-d^2v=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(2\cos v dx-x\sin v dv)dv-(2\cos u dy-y\sin u du)du].$$

【3405】 若

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

当 $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$ 时,求 du,dv,d^2u 和 d^2v.

解 把题中两式相除,平方相加,分别有

$$\begin{cases}\tan\frac{v}{y}=\frac{y}{x}, & ① \\ e^{\frac{2u}{x}}=\frac{x^2+y^2}{2}. & ②\end{cases}$$

微分 ① 式有

$$\sec^2\frac{v}{y}\cdot\frac{ydv-vdy}{y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2}. \quad ③$$

把　$x=1, y=1, v=\frac{\pi}{4}$,

代入 ③ 有

$$dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy).$$

微分 ③ 式有

$$2\sec^2\frac{v}{y}\tan\frac{v}{y}\cdot\left(\frac{ydv-vdy}{y^2}\right)^2$$

$$+\sec^2\frac{v}{y}\cdot\frac{y^2d^2v-2(ydv-vdy)dy}{y^3}$$

$$=-\frac{2(xdy-ydx)dx}{x^3}. \quad ④$$

把　$x=1, y=1, v=\frac{\pi}{4}$,

及 dv 值代入 ④ 式有

$$d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2$$

微分 ② 式

$$2e^{\frac{2u}{x}}\cdot\frac{xdu-udx}{x^2}=xdx+ydy. \quad ⑤$$

把　$x=1, y=1, u=0$,

代入 ⑤ 式有

$$du=\frac{dx+dy}{2}.$$

微分 ⑤ 式有

$$4e^{\frac{2u}{x}}\left(\frac{xdu-udx}{x^2}\right)^2+2e^{\frac{2u}{x}}\frac{x^2d^2u-2(xdu-udx)dx}{x^3}$$

$$=dx^2+dy^2. \quad ⑥$$

把　$x=1, y=1, u=0$,

及 du 代入 ⑥ 式有

$$d^2u=dx^2.$$

【3406】　设 $x=t+t^{-1}, y=t^2+t^{-2}, z=t^3+t^{-3}$.

求解$\dfrac{dy}{dx}$,$\dfrac{dz}{dx}$,$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 和$\dfrac{d^2z}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{2}{t^3}}{1-\frac{1}{t^2}}=2\left(t+\frac{1}{t}\right),$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-\frac{3}{t^4}}{1-\frac{1}{t^2}}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=2.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\left(2t-\frac{3}{t^3}\right)}{1-\frac{1}{t^2}}=6\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

【3407】 在 Oxy 平面的什么域内方程组

$$x=u+v,y=u^2+v^2,z=u^3+v^3$$

(其中参数 u 和 v 取所有可能的实值)把 z 定义为变量 x 和 y 的函数?求出导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 由

$$\begin{cases}u+v=x,\\ v^2+u^2=y.\end{cases}$$

有 $$u=\frac{x\pm\sqrt{2y-x^2}}{2},v=\frac{x\mp\sqrt{2y-x^2}}{4},$$

其中 $2y-x^2\geqslant 0$,

或 $y\geqslant\dfrac{x^2}{2}$.

对方程组

$$\begin{cases}x=u+v,\\ y=u^2+v^2.\end{cases}$$

求关于 x 的偏导数有

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

于是 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{v}{v-u}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{u}{v-u}. \end{cases} \qquad (u \neq v)$$

又对 $z = u^3 + v^3$ 求关于 x 的偏导数有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \cdot \frac{v}{v-u} - 3v^2 \cdot \frac{u}{v-u} \\ &= -3uv. \end{aligned}$$

同理 $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

【3407.1】 若

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$$

在 $u = 1, v = 1$ 时,求出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 对方程组

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$$

求关于 x 的偏导数有

$$\begin{cases} 1 = u'_x + \dfrac{v'_x}{v}, \\ 0 = v'_x - \dfrac{u'_x}{u}, \\ z_x = 2u'_x + v'_x. \end{cases}$$

其中 $\qquad u > 0, v > 0,$

$$u'_x = \frac{uv}{1+uv}, v'_x = \frac{v}{1+uv}.$$

于是 $$u'_x\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = \frac{1}{2}, v'_x\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = \frac{1}{2}.$$

从而 $$z'_x\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = 2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

同理有 $$u'_y = -\frac{u}{1+uv}, u'_y = \frac{uv}{uv+1}.$$

于是 $$u'_y\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = -\frac{1}{2}, v'_y\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = \frac{1}{2}.$$

从而 $$z'_y\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

【3407.2】 若

$$\begin{cases} x = u+v^2, \\ y = u^2-v^3, \\ z = 2uv. \end{cases}$$

在 $u = 2$，$v = 1$ 时，求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 对方程组

$$\begin{cases} x = u+v^2, \\ y = u^2-v^2, \\ z = 2uv. \end{cases}$$

两边求关于 x 的偏导数有

$$\begin{cases} 1 = u'_x+2vv'_x, \\ 0 = 2uu'_x-2vv'_x, \\ z'_x = 2(u'_xv+uv'_x). \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} u'_x = \frac{1}{1+2u}, \\ v'_x = \frac{u}{v(1+2u)}. \end{cases}$$

于是 $u'_x\Big|_{\substack{u=2\\v=1}}=\dfrac{1}{5}$,

$$v'_x\Big|_{\substack{u=2\\v=1}}=\frac{2}{5}. \qquad ①$$

对方程组

$$\begin{cases}x=u+v^2,\\ y=u^2-v^2.\end{cases}$$

两边求关于 y 的偏导数有

$$\begin{cases}0=u'_y+2vv'_y,\\ 1=2uu'_y-2vv'_y.\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}u'_y=\dfrac{1}{1+2u},\\ v'_y=-\dfrac{1}{2v(1+2u)}.\end{cases}$$

从而 $u'_y\Big|_{\substack{u=2\\v=1}}=\dfrac{1}{5}, v'_y\Big|_{\substack{u=2\\v=1}}=-\dfrac{1}{10}.$ ②

对 $u'_y=\dfrac{1}{1+2u}$ 两边求关于 x 的偏导数有

$$u''_{xy}=-\frac{2u'_y}{(1+2u)^2}=-\frac{2}{(1+2u)^3},$$

于是 $u''_{xy}\Big|_{\substack{u=2\\v=1}}=-\dfrac{2}{125}.$ ③

又对 $v'_y=-\dfrac{1}{2v(1+2u)}$ 两边求关于 x 的偏导数有

$$v''_{xy}=\frac{2v'_x(1+2u)+2v\cdot 2u'_x}{[2v(1+2u)]^2}$$

从而 $v''_{xy}\Big|_{\substack{v=2\\v=1}}=\dfrac{2\times\dfrac{2}{5}(1+2\times 2)+2\times 1\times 2\times\dfrac{1}{5}}{100}$

$$=\frac{24}{500}. \qquad ④$$

对 $z'_x=2(u'_xv+uv'_x)$

两边求关于 y 的偏导数有

$$z''_{xy} = 2[u''_{xy}v + u'_x v'_y + u'_y v'_x + uv''_{xy}]. \qquad ⑤$$

把 ①,②,③,④ 代入 ⑤ 式有

$$z''_{xy}\bigg|_{\substack{u=2\\v=1}} = \frac{7}{50}.$$

【3408】 若 $x = \cos\varphi\cos\psi, y = \cos\varphi\sin\psi, z = \sin\varphi$. 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 对

$$x = \cos\varphi\cos\psi, y = \cos\varphi\sin\psi,$$

求关于 x 的偏导数有

$$\begin{cases} 1 = -\sin\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ 0 = -\sin\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases}$$

于是 $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}, \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\cot\varphi\cos\varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \frac{\cos\psi}{\sin^2\varphi}\cdot\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}\right) + \cot\varphi\sin\psi\cdot\left(-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right) \\ &= -\frac{\cos^2\psi + \sin^2\psi\cdot\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi} \\ &= -\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cdot\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}. \end{aligned}$$

【3409】 若 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$. 求出$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 对 $x = u\cos v, y = u\sin v$,

两边求微分有

$$dx = \cos v du - u\sin v dv,$$

$$dy = \sin v du + u\cos v dv.$$

于是
$$du = \cos v dx + \sin v dy,$$

$$dv = \frac{1}{u}(-\sin v dx + \cos v dy),$$

$$u dv = -\sin v dx + \cos v dy. \quad ①$$

对 ① 式两边求微分有

$$u d^2 v + du dv = -\cos v dv dx - \sin v dv dy = -du dv,$$

从而
$$d^2 z = d^2 v = -\frac{2}{u} du dv$$

$$= -\frac{2}{u^2}(\cos v dx + \sin v dy)\cdot(-\sin v dx + \cos v dy)$$

$$= \frac{2}{u^2}(\sin v\cos v dx^2 - \cos 2v dx dy - \sin v\cos v dy^2).$$

故
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\sin v\cos v}{u^2} = \frac{\sin 2v}{u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

【3410】 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程组 $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = uv$（ u 和 v 为参数）定义，当 $u = 0$ 及 $v = 0$ 时，求 dz 与 $d^2 z$.

解
$$dx\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = e^{u+v}(du + dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = du + dv,$$

$$dy\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = e^{u-v}(du - dv)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = du - dv.$$

于是，当 $u = 0, v = 0$ 时

$$du = \frac{1}{2}(dx + dy), dv = \frac{1}{2}(dx - dy),$$

$$dz = u dv + v du = 0,$$

$$d^2 z = u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u = 2 du dv$$

$$= 2\left(\frac{dx + dy}{2}\right)\left(\frac{dx - dy}{2}\right) = \frac{1}{2}(dx^2 - dy^2).$$

【3411】 若 $z = x^2 + y^2$，这里 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 - xy + y^2$

$=1$ 定义,求$\frac{dz}{dx}$ 及$\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 由 $x^2-xy+y^2=1$,

有 $$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0. \qquad ①$$

于是 $$y'=\frac{2x-y}{x-2y},$$

$$y''=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}=\frac{6}{(x-2y)^3}.$$

由 $$z=x^2+y^2,$$

有 $$\frac{dz}{dx}=2x+2yy'=2x+2y\cdot\frac{2x-y}{x-2y}$$

$$=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2+2y'^2+2y''y=2y'+xy''$$

$$=\frac{2(2x-y)}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}.$$

【3412】 若$u=\frac{x+z}{y+z}$,这里 z 由方程 $ze^z=xe^x+ye^y$ 定义,求$\frac{\partial u}{\partial x}$ 及$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 对

$$ze^z=xe^x+ye^y,$$

两边求微分有

$$e^z(1+z)dz=e^x(1+x)dx+e^y(1+y)dy.$$

又由 $$u=\frac{x+z}{y+z},$$

有 $$du=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx+(y+z)dz-(x+z)dy-(x+z)dz]$$

$$=\frac{1}{(y+z)^2}[(y+z)dx-(x+z)dy+(y-x)dz]$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2}\Big[(y+z)\mathrm{d}x - (x+z)\mathrm{d}y$$

$$+ \frac{(y-x)\mathrm{e}^x(1+x)}{\mathrm{e}^z(1+z)}\mathrm{d}x + \frac{(y-x)\mathrm{e}^y(1+y)}{\mathrm{e}^z(1+z)}\mathrm{d}y\Big],$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}\mathrm{e}^{x-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}\mathrm{e}^{y-z}.$$

【3413】 设方程

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v)$$

定义 z 作为 x 和 y 的函数,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导数有

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad ①$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad ②$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad ③$$

由 ① 和 ② 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{A}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad ④$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

把 ④ 的结果代入 ③ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial u}\right).$$

同理有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right).$$

【3414】 设 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$ 求反函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数.

解 求两次微分有

$$\mathrm{d}x=\varphi'_1\mathrm{d}u+\varphi'_2\mathrm{d}v, \qquad ①$$

$$\mathrm{d}y=\psi'_1\mathrm{d}u+\psi'_2\mathrm{d}v, \qquad ②$$

$$0=\varphi''_{11}\mathrm{d}u^2+2\varphi''_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\varphi''_{22}\mathrm{d}v^2+\varphi'_1\mathrm{d}^2u+\varphi'_2\mathrm{d}^2v, \qquad ③$$

$$0=\psi''_{11}\mathrm{d}u^2+2\psi''_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\psi''_{22}\mathrm{d}v^2+\psi'_1\mathrm{d}^2u+\psi'_2\mathrm{d}^2v, \qquad ④$$

其中右下面标号 1,2 分别代表对 u,v 的偏导数.

令 $I=\varphi'_1\psi'_2-\varphi'_2\psi'_1$，

则由 ①,② 有

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{I}(\psi'_2\mathrm{d}x-\varphi'_2\mathrm{d}y), \qquad ⑤$$

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{I}(\varphi'_1\mathrm{d}y-\psi'_1\mathrm{d}x). \qquad ⑥$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{I}\psi'_2=\dfrac{1}{I}\dfrac{\partial\psi}{\partial v},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{I}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v},$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

根据 ③,④,并把 ⑤,⑥ 代入有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=\frac{1}{I}[\varphi'_2(\psi''_{11}\mathrm{d}u^2+2\psi''_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\psi''_{22}\mathrm{d}v^2)\\&\quad-\psi'_2(\varphi''_{11}\mathrm{d}u^2+2\varphi''_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\varphi''_{12}\mathrm{d}v^2)]\\&=\frac{1}{I^3}[(\varphi'_2\psi''_{11}-\psi'_2\varphi''_{11})(\psi'_2\mathrm{d}x-\varphi'_2\mathrm{d}y)^2\\&\quad+2(\varphi'_2\psi''_{12}-\psi'_2\varphi''_{12})(\psi'_2\mathrm{d}x-\varphi'_2\mathrm{d}y)(\varphi'_1\mathrm{d}y-\psi'_1\mathrm{d}x)\\&\quad+(\varphi'_2\psi''_{22}-\psi'_2\varphi''_{22})(\varphi'_1\mathrm{d}y-\psi'_1\mathrm{d}x)^2]\\&=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

比较上式两端的系数有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{I^3}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial\psi}{\partial v}\Big)^2$$

$$-2\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\Big)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

$$+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\Big)\Big(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big)^2\Big],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{I^3}\Big[\Big(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\Big)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

$$-\Big(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big)$$

$$+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{I^3}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Big)^2$$

$$-2\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\Big)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big)^2\Big].$$

类似地可求 $d^2 v,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

【3415】 若(1) $x=u\cos\frac{v}{u},y=u\sin\frac{v}{u}$;

(2) $x=e^u+u\sin v,y=e^u-u\cos v$.

求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 由

$$\varphi(u,v)=u\cos\frac{v}{u},\psi(u,v)=u\sin\frac{v}{u},$$

有
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u},\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u},\frac{\partial\psi}{\partial v}=\cos\frac{v}{u},$$

$$I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

$$= \left(\cos\frac{v}{u} + \frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\right)\cos\frac{v}{u}$$

$$+ \sin\frac{v}{u}\cdot\left(\sin\frac{v}{u} - \frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$$

$$= 1.$$

于是由 3414 结论有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \cos\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} - \sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} + \cos\frac{v}{u}.$$

(2) 由

$$\varphi(u,v) = e^u + u\sin v, \psi(u,v) = e^u - u\cos v,$$

有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = e^u + \sin v, \frac{\partial\varphi}{\partial v} = u\cos v,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = e^u - \cos v, \frac{\partial\psi}{\partial v} = u\sin v,$$

$$I = (e^u + \sin v)u\sin v - (e^u - \cos v)u\cos v$$

$$= u[e^u(\sin v - \cos v) + 1].$$

于是由 3414 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e^u - \cos u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

【3416】 函数 $u = u(x)$ 由以下方程组定义：$u = f(x,y,$

$z)$, $g((x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$. 求$\frac{du}{dx}$ 及$\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 微分有

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

$$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f, \qquad ①$$

$$0 = g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz$$

$$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)g, \qquad ②$$

$$0 = h'_x dx + h'_y dy + h'_z dz$$

$$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)h. \qquad ③$$

令 $$\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)} = I_1, \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)} = I_2, \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)} = I_3,$$

则由 ②,③ 有

$$dy = \frac{I_2}{I_1}dx, dz = \frac{I_3}{I_1}dx.$$

把 dy,dz 代入 ①,我们有

$$du = f'_x dx + f'_y \cdot \frac{I_2}{I_1}dx + f'_z \cdot \frac{I_3}{I_1}dx$$

$$= \frac{1}{I_1}(I_1 f'_x + I_2 f'_y + I_3 f'_z)dx = \frac{I}{I_1}dx,$$

其中 $$I = \frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}.$$

于是 $$\frac{du}{dx} = \frac{I}{I_1}.$$

现对 ①,②,③ 式再求微分有

$$d^2u = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + f'_y d^2y + f'_z d^2z, \qquad ④$$

$$0 = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g + g'_y d^2y + g'_z d^2z, \qquad ⑤$$

$$0=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+h'_y\mathrm{d}^2y+h'_z\mathrm{d}^2z. \quad ⑥$$

于是
$$\mathrm{d}^2y=\frac{1}{I_1}\Big[g'_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h$$
$$-h'_x\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\Big],$$
$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{I_1}\Big[h'_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g$$
$$-g'_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Big].$$

令 $\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}=I_4,\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=I_5.$

把 $\mathrm{d}^2y,\mathrm{d}^2z$ 代入 ④ 有
$$\mathrm{d}^2u=\frac{1}{I_1}\Big[I_1\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f$$
$$+I_4\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g$$
$$+I_5\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Big].$$

把 $\mathrm{d}y=\dfrac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x,\mathrm{d}z=\dfrac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x.$

代入上式有
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{I_1^3}\Big[I_1\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f$$
$$+I_4\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g$$
$$+I_5\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Big].$$

【3417】 函数 $u=u(x,y)$ 由以下方程组定义:$u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0.$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 对 $u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$,

求微分有 $\mathrm{d}u=f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y+f'_z\mathrm{d}z+f'_t\mathrm{d}t,$ ①

$$0=g'_y\mathrm{d}y+g'_z\mathrm{d}z+g'_t\mathrm{d}t, \quad ②$$

$$0 = h'_z \mathrm{d}z + h'_t \mathrm{d}t. \qquad ③$$

令 $\quad I_1 = \dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)},$

于是由 ②,③ 有

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{I_1}(-g'_y h'_t)\mathrm{d}y, \mathrm{d}t = \frac{1}{I_1}\cdot(g'_y h'_z)\mathrm{d}y.$$

把 $\mathrm{d}z, \mathrm{d}t$ 代入 ① 式有

$$\mathrm{d}u = f'_x \mathrm{d}x + f'_y \mathrm{d}y - \frac{g'_y}{I_1}(f'_z h'_t - f'_t h'_z)\mathrm{d}y.$$

于是 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = f'_x, \dfrac{\partial u}{\partial y} = f'_y + g'_y \cdot \dfrac{I_2}{I_1},$

其中 $\quad I_2 = \dfrac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}.$

【3418】 设 $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和$\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 对

$$x = f(u,v,w), y = g(u,v,w), z = h(u,v,w)$$

求微分有

$$\mathrm{d}x = f'_u \mathrm{d}u + f'_v \mathrm{d}v + f'_w \mathrm{d}w,$$
$$\mathrm{d}y = g'_u \mathrm{d}u + g'_v \mathrm{d}v + g'_w \mathrm{d}w,$$
$$\mathrm{d}z = h'_u \mathrm{d}u + h'_v \mathrm{d}v + h'_w \mathrm{d}w.$$

令 $\quad I = \dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)},$

于是有 $\quad \mathrm{d}u = \dfrac{1}{I}\begin{vmatrix} \mathrm{d}x & f'_v & f'_w \\ \mathrm{d}y & g'_v & g'_w \\ \mathrm{d}z & h'_v & h'_w \end{vmatrix} = \dfrac{I_1}{I}\mathrm{d}x + \dfrac{I_2}{I}\mathrm{d}y + \dfrac{I_3}{I}\mathrm{d}z;$

其中 $\quad I_1 = \dfrac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}, I_2 = \dfrac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}, I_3 = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}.$

从而 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{I_1}{I}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{I_2}{I}, \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{I_3}{I}.$

【3419】 设函数 $z = z(x,y)$ 满足方程组 $f(x,y,z,t) = 0$,

$g(x,y,z,t)=0$. 这里 t 为变量参数. 求 dz.

解 对 $f(x,y,z,t)=0, g(x,y,z,t)=0$,

微分有 $f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt = 0$,

$g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz + g'_t dt = 0$.

把 dz, dt 看作未知数,解上述方程有

$$dz = \frac{1}{I_3}[f'_t \cdot (g'_x dx + g'_y dy) - g'_t \cdot (f'_x dx + f'_y dy)]$$

$$= \frac{1}{I_3}[(f'_t g'_x - g'_t f'_x)dx + (f'_t g'_y - g'_t f'_y)dy]$$

$$= -\frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3},$$

其中 $I_1 = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}, I_2 = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}, I_3 = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$.

【3420】 设 $u=f(z)$,这里 z 为变量 x 和 y 的隐函数,且由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 定义. 证明拉格朗日公式:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

提示:证明 $n=1$ 的公式并采用数学归纳法.

证 由 $dz = dx + \varphi(z)dy + y\varphi'(z)dz$

有 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1-y\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)} = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

于是有 $$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = f'(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

从而当 $n=1$ 时成立. 对任意可微函数 $g(z)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = g'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$= \varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + g(z)\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\varphi(z)g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi'(z)g(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(z)g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)g(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

令 $g(z)=\varphi(z)$,

有 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^2(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

也就是 $n=2$ 时,该公式也成立,现设 $n=k$ 时,公式成立. 即

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

于是 $$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

因而,当 $n=k+1$ 时,拉格朗日公式也成立,从而对一切自然数 n,

皆有 $$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

【3421】 设函数 $z=z(x,y)$ 由以下方程定义:

$$\Phi(x-az,y-bz)=0, \qquad ①$$

其中 $\Phi(u,v)$ 为变量 u 和 v 的任意可微函数(a 和 b 为常数). 证明 $z=z(x,y)$ 是方程 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解. 说明公式 ① 的几何性质.

证 由

$$\begin{cases}\Phi'_1\cdot\left(1-a\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-b\Phi'_2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ -\Phi'_1\cdot a\dfrac{\partial z}{\partial y}+\Phi'_2\cdot\left(1-b\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0.\end{cases}$$

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\Phi'_1}{a\Phi'_1+b\Phi'_2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\Phi'_2}{a\Phi'_1+b\Phi'_2}.$$

把上面两等式依次乘 a、b,然后相加有

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

即 $z=z(x,y)$ 为方程 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解.

等式 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}-1=0$ 表示曲面 ① 上任一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_1},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_1},-1\right\}$ 皆与向量的 $\boldsymbol{r}_1=\{a,b,1\}$ 垂直,过点 P_1 作平行于 $\boldsymbol{r}_1$ 的直线 l_1

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1}.$$

易知 l_1 上的点皆在曲面 ① 上,于是,曲面 ① 是母线平行于 $\boldsymbol{r}_1$ 的柱面.

【3422】 设函数 $z=z(x,y)$ 由以下方程定义:

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0, \qquad ②$$

其中 $\Phi(u,v)$ 为变量 u 和 v 的任意可微函数. 证明 $z=z(x,y)$ 满足方程:

$(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-z_0$. 说明公式 ② 的几何性质.

证 由于

$$\Phi'_1\cdot\frac{z-z_0-(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}-\Phi'_2\cdot\frac{(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}=0,$$

$$-\Phi'_1\cdot\frac{(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}+\Phi'_2\cdot\frac{z-z_0-(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}=0,$$

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)\Phi'_1}{(x-x_0)\Phi'_1+(y-y_0)\Phi'_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)\Phi'_2}{(x-x_0)\Phi'_1+(y-y_0)\Phi'_2}.$$

把上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$,然后相加有

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

等式 $(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}-(z-z_0)=0$,

表示曲面(2) 在其上任一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的法向量

$$\boldsymbol{n}_2=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_2},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_2},-1\right\},$$

与向量 $\boldsymbol{r}_2=\{x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0\}$,

垂直,作过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 L_2

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0},$$

易知 L_2 上的任一点皆在曲面 ② 上,于是曲面 ② 是顶点在 P_0 的锥面.

【3423】 证明:由以下方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2), \qquad ③$$

(其中 $\Phi(u)$ 为变量 u 和 a 的任意微分函数,b 和 c 为常数) 定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程:$(cy-bz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$. 说明公式 ③ 的几何性质.

证 由

$$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'\cdot\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}.$$

把上面二个等式依次乘以$(cy-bz)$和$(az-cx)$,然后相加有

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}$$

$$=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay.$$

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 是曲面 ③ 上任意一点,记

$$\boldsymbol{r}_3=\{a,b,c\},$$

由曲面③在 P_3 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}_3=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_3},\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_3},-1\right\},$$

有 $$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0.$$

于是 $$\boldsymbol{n}_3\perp(\vec{P}_3\times\boldsymbol{r}_3),$$

其中 $$\vec{P}_3=\{x_3,y_3,z_3\}.$$

设由原点到 P_3 的距离为 d,即

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2=\mathrm{d}^2.$$

考虑平面 A:$ax+by+cz=\mathrm{d}$ 和过点 P_3 的球面 S:$x^2+y^2+z^2=\mathrm{d}^2$,且设平面 A 与球面 S 的交线为 C,则

1° 由点 P_3 在曲面③上可知

$$ax_3+by_3+cz=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2),$$

即 $$\mathrm{d}=\Phi(\mathrm{d}^2).$$

这说明曲线 c 点的坐标皆满足方程③,即曲线 C 位于曲面③上.

2° 由 A 为平面,S 为球面知交线 C 为一圆周曲线.

3° 圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面 A 的垂足,故 Q 点位于过原点且与平面 A 垂直的直线 l 上.

综上所述,可见曲面③是以直线 l:$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 为旋转轴的旋转曲面.

【3424】 函数 $z=z(x,y)$ 由以下方程定义:

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right),$$

证明:$(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz.$

证 由 $2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\dfrac{z}{y}\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}$,

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}.$$

同理有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2+z^2-zf'\left(\dfrac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\dfrac{z}{y}\right)}$,

于是 $$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$=\frac{2xy(z^2+y^2-x^2)+2xy(x^2-y^2+z^2-zf')}{y(2z-f')}$$
$$=\frac{2xyz(2z-f')}{y(2z-f')}=2xz.$$

【3425】 函数 $z=z(x,y)$ 由以下方程定义:
$$F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$$
证明:$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

证 由
$$F'_1\cdot\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(\frac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right)=0,$$
$$F'_1\cdot\left(\frac{y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}\right)+F'_2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$
有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1}{x(xF'_1+yF'_2)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF'_1-xy^2F'_2}{y(xF'_1+yF'_2)},$$
于是 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1+xzF'_1-xy^2F'_2}{xF'_1+yF'_2}$$
$$=\frac{(z-xy)(xF'_1+yF'_2)}{xF'_1+yF'_2}=z-xy.$$

【3426】 证明:由以下方程组
$$\begin{cases}x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha),\\-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha),\end{cases}$$
(其中 $\alpha=\alpha(x,y)$ 为变量参数和 $f(\alpha)$ 为任意微分函数)定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2$.

证　对 $x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha)$，
两边求关于 x 的偏导数有

$$\cos\alpha - x\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + y\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = f'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

把　$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha)$，
代入上式有

$$\cos\alpha + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

或　$$\frac{\partial z}{\partial x} = -z\cos\alpha. \qquad ①$$

同理有　$$\frac{\partial z}{\partial y} = -z\sin\alpha. \qquad ②$$

把 ①,② 两式依次平方，然后相加有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

【3427】　证明：由以下方程组

$$\begin{cases} z = \alpha x + \dfrac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 = x - \dfrac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{cases}$$

定义的函数 $z = z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

证　由

$$dz = \alpha dx + \frac{1}{\alpha}dy + \left[x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha)\right]d\alpha = \alpha dx + \frac{1}{\alpha}dy,$$

有　$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\alpha},$$

于是　$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = 1.$$

【3428】　证明：由以下方程组

$$\begin{cases} [z - f(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), \\ [z - f(\alpha)]f'(\alpha) = \alpha x^2, \end{cases}$$

定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

证 因为

$$2[z-f(\alpha)][\mathrm{d}z-f'(\alpha)\mathrm{d}\alpha]$$
$$=(y^2-\alpha^2)2x\mathrm{d}x+x^2(2y\mathrm{d}y-2\alpha\mathrm{d}\alpha),$$

于是
$$[z-f(\alpha)]\mathrm{d}z=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y-\{\alpha x^2-[z-f(x)]f'(\alpha)\}\mathrm{d}\alpha$$
$$=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y.$$

从而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(y^2-\alpha^2)}{z-f(\alpha)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}.$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy\cdot\frac{x^2(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy.$$

【3429】 证明:由以下方程组

$$\begin{cases}z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\\0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha),\end{cases}$$

定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$.

证 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha+x\frac{\partial\alpha}{\partial x}+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}$$
$$=\alpha+[x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\alpha,$$

有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

又
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\varphi(\alpha)+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\varphi(\alpha),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

而
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\varphi'(\alpha)-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2$$
$$=\frac{\partial\alpha}{\partial y}\left[\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right],$$

又 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},$$

于是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

【3430】 证明:由以下方程式

$$y=x\varphi(z)+\psi(z),$$

定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\frac{\partial z}{\partial y}=q,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

现对方程两边分别求关于 x 和 y 的偏导数有

$$\varphi(z)+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]p=0,$$

$$[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1,$$

$$2\varphi'(z)p+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]r=0, \quad ①$$

$$\varphi'(z)q+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]pq+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]s=0. \quad ②$$

$$[x\varphi''(z)+\psi''(z)q^2]+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]t=0. \quad ③$$

把 ①、②、③ 三式依次乘以 q^2,$(-2pq)$ 及 p^2,然后相加. 又

$$[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q=1\neq 0.$$

于是 $$rq^2-2pqs+tp^2=0,$$

即 $$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

§ 4. 变量代换

1. **在含有导数的式子中的变量代换** 在下式中:

$$A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\cdots),$$

需要把 x,y 转换成新的变量:t(自变量) 及 u(函数),它们通过

方程

$$x = f(t,u), y = g(t,u) \tag{①}$$

与原来的变量 x 及 y 联系起来将方程式 ① 微分，得出：

$$y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t},$$

类似地可表示出高阶导数 y''_{xx}，…. 因此我们有：

$$A = \Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\cdots).$$

2. **在含有偏导数的式子中自变量的代换** 在下式中：

$$B = F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots\right),$$

假设： $x = f(u,v), y = g(u,v)$

其中 u 和 v 为新的自变量，则逐次偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，… 由以下方程确定：

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

等等.

3. **在含有偏导数的式子中自变量和函数的代换** 在一般的情况下，若我们有以下方程：

$$x = f(u,v,\omega), \quad y = g(u,v,\omega),$$

$$z = h(u,v,\omega) \tag{③}$$

其中 u，v 为新的自变量和 $\omega = \omega(u,v)$ 为新函数，则对于偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，…，我们得到以下方程：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

等等.

在某些情况下，利用全微分作变量代换是很方便的.

【3431】 取 y 作为新的自变量,变换方程

$$y'y'''-3y''^2=x$$

解 函数 $y=y(x)$ 与其反函数 $x=x(y)$ 的导数,有如下关系 $\quad y'=\frac{1}{x'}$, 公式 ①

于是 $y''=(y')'=\left(\frac{1}{x'}\right)'_y\cdot y'_x=-\frac{x''}{(x')^2}\cdot\frac{1}{x'}=-\frac{x''}{(x')^3}$, 公式 ②

$$y'''=(y'')'=-\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]'_y\cdot y'_x=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}.$$

公式 ③

把公式 ①,②,③ 代入

$$y'y'''-3y''^2=x,$$

有 $\quad x'''+x(x')^5=0.$

【3432】 用同样的方式变换方程:

$$y'^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15y''^3=0.$$

解 由 3431 题中公式 ③ 有

$$y^{(4)}=(y''')'=\left[\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}\right]'_y\cdot y'_x$$

$$=\frac{6x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-x'x''x'''-5[3(x'')^2-x'x''']x''}{(x')^6}\cdot\frac{1}{x'}$$

$$=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}. \qquad \text{公式 ④}$$

把 3431 中的公式 ①,②,③ 及公式 ④ 代入所给方程有

$$x^{(4)}=0.$$

【3433】 取 x 作函数,$t=xy$ 作为自变量,变换方程:

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0.$$

解 把 t 看成是 x 的函数,对 $t=xy$ 两边求关于 x 的一阶,二阶导数有

$$\frac{dt}{dx}=y+xy', \qquad ①$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} = 2y' + xy''. \qquad ②$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}$,

有
$$y' = \frac{1 - y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}. \qquad ③$$

由 3431 中的公式 ② 有

$$-\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3} = 2y' + xy', y'' = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}{x\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3} - \frac{2y'}{x}. \qquad ④$$

把 ④ 式代入所给方程有

$$-\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + xy\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3 = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - t\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3 = 0.$$

引入新的变量，变换以下常微分方程(3434 ~ 3443).

【3434】 $x^2 y'' + xy' + y = 0$,若 $x = \mathrm{e}^t$.

解 由 3431 及

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}, \qquad \text{公式 ⑤}$$

有
$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3}, \qquad \text{公式 ⑥}$$

由 $x = \mathrm{e}^t$,

有 $$\frac{dx}{dt}=e^t=x,\frac{d^2x}{dt^2}=e^t=x.$$

于是

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{x},y''=\frac{x\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dt}}{x^3}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

把 y' 和 y'' 代入所给方程有

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

【3435】 $y'''=\frac{6y}{x^3}$,若 $t=\ln|x|$.

解 由复合函数求导公式有

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{x^2},$$

$$\begin{aligned}y'''&=\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}-2x\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]\\&=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).\end{aligned}$$

把 y''' 代入该题方程有

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

【3436】 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$,若 $x=\cos t$.

解 由

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t,\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t,$$

和公式(5),公式(6),有

$$y'=-\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t},y''=\frac{-\sin t\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

把 y',y'' 和 $x=\cos t$ 代入该题的方程有

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

【3437】 $y''+y'\text{th}x+\frac{m^2}{\text{ch}^2x}y=0$，若 $x=\ln\tan\frac{t}{2}$.

解 由公式 5 和公式 6 及

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sin t},\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\cos t}{\sin^2t},$$

$$\text{ch}x=\frac{1}{\sin t},\text{th}x=-\cos t,$$

有 $$y'=\sin t\frac{dy}{dt},y''=\sin^2t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\cos t\frac{dy}{dt}.$$

把 y'，y''，$\text{ch}x$ 和 $\text{th}x$ 代入该题的方程有

$$\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0.$$

【3438】 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，若 $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$，其中 $p(x)\in C^{(1)}$.

解 由

$$y'=\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{1}{2}u\cdot p(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi},$$

$$y''=\frac{d^2u}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-p(x)\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$$
$$+\frac{1}{4}u\cdot p^2(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{1}{2}up'(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi},$$

故把 y'，y'' 代入该题方程有

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0.$$

【3439】 $x^4y''+xyy'-2y^2=0$，设 $x=e^t$ 和 $y=ue^{2t}$，其中 $u=u(t)$.

解 因为

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{2t}(2u+u')}{e^t}=e^t(2u+u'),$$

$$y''=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}^t(u''+3u'+2u)}{\mathrm{e}^t}=u''+3u'+2u.$$

这里 u',u'' 表示 u 对 t 的一阶导数、二阶导数，以下各题类似，把 y',y'' 和 x,y 代入该题的方程有

$$u''+(u+3)u'+2u=0.$$

【3440】 $(1+x^2)^2y''=y$，设 $x=\tan t$ 和 $y=\dfrac{u}{\cos t}$，其中 $u=u(t)$.

解 $$y'=\frac{\frac{u'\cos t+u\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}=u'\cos t+u\sin t,$$

$$y''=\frac{u''\cos t+u\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}}=(u''+u)\cos^3 t.$$

把 y',y'' 和 x,y 代入所给方程有 $u''=0$.

【3441】 $(1-x^2)^2y''=-y$，设 $x=\operatorname{th}t,y=\dfrac{u}{\operatorname{ch}t}$，其中 $u=u(t)$.

解 $$y'=\frac{\frac{u'\operatorname{ch}t-u\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2 t}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}}=u'\operatorname{ch}t-u\operatorname{sh}t,$$

$$y''=\frac{u''\operatorname{ch}t-u\operatorname{ch}t}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}}=(u''-u)\operatorname{ch}^3 t,$$

把 y'' 和 x,y 代入所给方程有 $u''=0$.

【3442】 $y''+(x+y)(1+y')^3=0$，设 $x=u+t,y=u-t$，其中 $u=u(t)$.

解 $$y'=\frac{u'-1}{u'+1},$$

$$y''=\frac{\dfrac{u''(u'+1)-u''(u'-1)}{(u'+1)^2}}{u'+1}=\frac{2u''}{(u'+1)^3},$$

把 y',y'' 和 x,y 代入该题的方程有

$$u''+8u(u')^3=0.$$

【3443】 $y'''-x^3y''+xy'-y=0$,若 $x=\dfrac{1}{t}$,$y=\dfrac{u}{t}$,其中 $u=u(t)$.

解 $y'=\dfrac{\dfrac{u't-u}{t^2}}{-\dfrac{1}{t^2}}=u-tu'$,$y''=\dfrac{-tu''}{-\dfrac{1}{t^2}}=t^3u''$,

$$y'''=\frac{3t^2u''+t^3u'''}{-\dfrac{1}{t^2}}=-t^4(3u''+tu'''),$$

把 y',y'',y''' 和 x,y 代入所给方程有

$$t^5u'''+(3t^4+1)u''+u'=0.$$

【3444】 假定:

$$u=\frac{y}{x-b},t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

并取 u 作为变量 t 的函数,变换斯托克斯方程:

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

解 由

$$t=\ln|x-a|-\ln|x-b|,$$

有 $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{(x-a)(x-b)},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{(x-a)(x-b)}{a-b}. \qquad ①$$

又 $$u=\frac{y}{x-b},$$

故 $$y=u(x-b),$$

$$y' = (x-b)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}(x-b) + u = \frac{(a-b)u'}{x-a} + u, \quad ②$$

$$y'' = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \left[\frac{(a-b)u''}{x-a} + u' - \frac{(a-b)u'}{(x-a)^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}$$

$$= \frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}. \quad ③$$

把③式代入所给方程有

$$u'' - u' = \frac{Au}{(a-b)^2}, a \neq b.$$

【3445】 证明:若把 $x = \varphi(\xi)$ 代入方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0,$$

变换为方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + P(\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

则 $$[2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$$
$$= [2p(x)q(x) + q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}$$

证 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \varphi'(\xi), \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\xi^2} = \varphi''(\xi).$

由公式5,公式6有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}}{\varphi'(\xi)}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{[\varphi'(\xi)]^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\varphi''(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi},$$

代入原方程,两端同乘 $[\varphi'(\xi)]^2$ 有

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + \left\{p[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi) - \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + q[\varphi(\xi)][\varphi'(\xi)]^2 y = 0.$$

于是 $$P(\xi) = p\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'}, Q(\xi) = q\cdot(\varphi')^2.$$

$$Q'(\xi) = q'\cdot(\varphi')^3 + 2q\varphi'\varphi''.$$

从而有 $\quad [2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$

$$=\left\{2\left(p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)q\cdot(\varphi')^2+q'\cdot(\varphi')^3+2q\varphi'\varphi''\right\}\cdot$$

$$[q\cdot(\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\{2pq\cdot(\varphi')^3+q'\cdot(\varphi')^3\}q^{-\frac{3}{2}}\cdot(\varphi')^{-3}$$

$$=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

【3446】 在方程 $\Phi(y,y',y'')=0$(其中 Φ 为变量 y,y',y'' 的齐次函数)中假设 $y=e^{\int_{x_0}^{x}u\,dx}$.

解 把

$$y'=ue^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x},y''=(u'+u^2)e^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x},$$

代入方程 $\Phi(y,y',y'')=0$. 由于 Φ 关于 y,y',y'' 是齐次的,因此各项含有因式 $e^{\int_{x_0}^{x}u\mathrm{d}x}$ 皆可约去,有

$$\Phi(1,u,u'+u^2)=0.$$

【3447】 在方程 $F(x^2y'',xy',y)=0$(其中 F 为自变量的齐次函数)中假设 $u=x\cdot\dfrac{y'}{y}$.

解 $\quad y'=\dfrac{yu}{x}$

$$y''=\frac{x(u'y+y'u)-yu}{x^2}=\frac{y[xu'+(u^2-u)]}{x^2},$$

于是 $\quad xy'=uy,x^2y''=y[xu'+(u^2-u)].$

因为 F 为其变量的齐次函数,故各项含有的因子 y 皆可约去,从而

$$F(xu'+u^2-u,u,1)=0.$$

【3448】 证明:方程

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

在下列射影变换下不改变其形式:

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c},y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}$$

提示:该变换可以写成最简单变换的合成:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, y = Y$$

$$X = \frac{1}{X_1}, Y = \frac{Y_1}{X_1}$$

和 $$X_1 = a\xi + b\eta + c, Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_2$$

证 本题不对，事实上，作压缩变换

$$x = \xi, y = a\eta, (a \neq 0).$$

这是射影变换的特例，有

$$a\eta''(1 + a\eta'^2) - 3a^3\eta'\eta''^2 = 0.$$

形式改变.

【3449】 证明：施瓦茨方程

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

在下列线性分式变换下不改变其数值：

$$y = \frac{ax(t)+b}{cx(t)+d} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

证 由

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{cx+d}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)},$$

于是已知变换是由下述变换构成

$$y = \alpha + \beta y_2, y_2 = \frac{1}{y_1}, y_1 = cx + d.$$

故我们只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可.

1° 令 $y_1 = cx + d$，

则 $$y'_1(t) = cx'(t), y''_1(t) = cx''(t),$$

$$y'''_1(t) = cx'''(t).$$

于是 $$S[y_1(t)] = \frac{y'''_1(t)}{y'_1(t)} - \frac{3}{2}\left[\frac{y''_1(t)}{y'_1(t)}\right]^2$$

$$= \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2 = S(x(t)).$$

2° 令 $y_2=\dfrac{1}{y}$,

则 $$y'_2(t)=-\frac{y'_1}{y_1^2},\ y''_2(t)=-\frac{y_1y''_1-2y'^2_1}{y_1^3},$$

$$y'''_2(t)=-\frac{y'''_1y_1^2-6y''_1y'_1y_1+6y'^3_1}{y_1^4},$$

于是 $$S(y_2(t))=\frac{y'''_2(t)}{y'_2(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{y''_2(t)}{y'_2(t)}\right]^2$$

$$=\frac{\dfrac{y'''_1y_1^2-6y''_1y'_1y_1+6y'^3_1}{y_1^4}}{\dfrac{y'_1}{y_1^2}}-\frac{3}{2}\left[\frac{\dfrac{y_1y''_1-2y'^2_1}{y_1^3}}{\dfrac{y'_1}{y_1^2}}\right]^2$$

$$=\frac{y'''_1}{y'_1}-\frac{6y''_1}{y_1}+\frac{6y'^2_1}{y_1^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''_1}{y'_1}-\frac{2y'_1}{y_1}\right)^2$$

$$=\frac{y'''_1}{y'_1}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''_1}{y'_1}\right)^2=S[y_1(t)]=S[x(t)].$$

3° 由 1° 和 2° 知

$$S(y(t))=S(\alpha+\beta y_2)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta y_2)'''}{(\alpha+\beta y_2)'}-\frac{3}{2}\left\{\frac{(\alpha+\beta y_2)''}{(\alpha+\beta y_2)'}\right\}^2$$

$$=\frac{y'''_2}{y'_2}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''_2}{y'_2}\right)^2=S(y_2(t))=S(x(t)).$$

将下列方程改变为极坐标 r 和 φ 所表示的方程，假定(3450～3452).

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

【3450】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

解 由

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$$

有 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\cos\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}-r\sin\varphi,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}=\sin\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\varphi^2}=\cos\varphi\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}-r\cos\varphi$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}=\sin\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi$$

由公式⑤和公式⑥(3434题)有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi},\qquad\text{公式⑦}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}.$$

公式⑧

把公式⑦和x,y代入所给方程,有$\frac{dr}{d\varphi}=r$或$r'=r$.

注:以下各题中$\frac{dr}{d\varphi}$和$\frac{d^2r}{d\varphi^2}$皆简记为r'和r''.

【3451】 $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

解 $xy'-y$

$$=r\cos\varphi\cdot\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}-r\sin\varphi$$

$$=\frac{r(r'\sin\varphi\cos\varphi+r\cos^2\varphi-r'\sin\varphi\cos\varphi+r\sin^2\varphi))}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

$$=\frac{r^2}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

$$1+y'^2=1+\left(\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}\right)^2=\frac{r'^2+r^2}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2}.$$

把$xy'-y,1+y'^2$和x,y代入所给方程,有

$$r'^2=\frac{1-\sin2\varphi}{\sin2\varphi}r^2.$$

【3452】 $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

解 $x+yy'$

$$=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

$$= \frac{rr'\cos^2\varphi - r^2\sin\varphi\cos\varphi + rr'\sin^2\varphi + r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$= \frac{rr'}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}.$$

把公式⑧, $x+yy'$, x, y 代入该题的方程,有

$$r(r^2+2r'^2-rr'') = r'^3.$$

【3453】 把$\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$变换成极坐标的式子.

解 把3451题中 $xy'-y$ 的结论和3452题中的 $x+yy'$ 的结论代入该题所给的式子,有

$$\frac{x+yy'}{xy'-y} = \frac{r'}{r}.$$

【3454】 把平面曲线的曲率

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 和 φ 表示:

解 把3451题中 $1+y'^2$ 的结论和公式⑧代入曲率式子,有

$$K = \frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【3455】 将方程组$\dfrac{dx}{dt} = y+kx(x^2+y^2)$, $\dfrac{dy}{dt} = -x+ky(x^2+y^2)$ 转换成极坐标方程.

解 把

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$$

代入该题方程组,有

$$\begin{cases} \cos\varphi\dfrac{dr}{dt} - r\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{dt} = r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi, \\ \sin\varphi\dfrac{dr}{dt} + r\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dt} = -r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi, \end{cases}$$

于是 $$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}[r\cos\varphi\cdot(r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi)]$$

$$= kr^3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}[\cos\varphi\cdot(-r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi)$$

$$-\sin\varphi\cdot(r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi)]$$

$$=-1.$$

故 $$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt} = kr^3,\\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -1.\end{cases}$$

【3456】 引入新函数

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

变换公式 $W = x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

解 对

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

两边微分有

$$dr = \frac{xd + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy,$$

即 $$rdr = xdx + ydy. \qquad ①$$

对 $$\varphi = \arctan\frac{y}{x},$$

两边微分有

$$d\varphi = \frac{xdx - ydx}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}dy - \frac{y}{r^2}dx,$$

即 $$r^2d\varphi = xdy - ydx. \qquad ②$$

于是由 ① 和 ② 有

$$xrdr - yr^2d\varphi = (x^2dx + xydy) - (xydy - y^2dx)$$
$$= (x^2+y^2)dx = r^2dx,$$

$$dx = \frac{x}{r}dr - yd\varphi. \qquad ③$$

同理 $$\mathrm{d}y=\frac{y}{r}\mathrm{d}r+x\mathrm{d}\varphi. \qquad ④$$

从而由 ③ 和 ④ 有

$$\begin{aligned}
&x\mathrm{d}^2y-y\mathrm{d}^2x\\
&=x\left(\frac{y}{r}\mathrm{d}^2r-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}r^2+\frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi+x\mathrm{d}^2\varphi\right)\\
&\quad-y\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}^2r-\frac{x}{r^2}\mathrm{d}r^2+\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}r-\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi-y\mathrm{d}^2\varphi\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}r}{r}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)+(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\mathrm{d}\varphi+(x^2+y^2)\mathrm{d}^2\varphi\\
&=\frac{\mathrm{d}r}{r}(r^2\mathrm{d}\varphi)+(r\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi+r^2\mathrm{d}^2\varphi\\
&=2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+r^2\mathrm{d}^2\varphi,
\end{aligned}$$

于是 $W=x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r^2\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$.

【3457】 在勒让德的变换中曲线 $y=y(x)$ 的每一个点(x,y)与点(X,Y)对应,其中 $X=y'$, $Y=xy'-y$. 求 Y',Y'' 和 Y'''.

解 $$Y'=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X}=\frac{xy''}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}=\frac{xy''}{y''}=x,$$

$$Y''=\frac{\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{y''},$$

$$Y'''=\frac{\frac{\mathrm{d}Y''}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}=\frac{-\frac{y'''}{y''^2}}{y''}=-\frac{y'''}{y''^3}.$$

引入新的自变量 ξ 和 η,解下列方程(3458 ~ 3461).

【3458】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$,令 $\xi=x+y$,及 $\eta=x-y$.

解 由 $\xi=x+y,\eta=x-y$,

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

把上式代入原方程有

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

即 $$\frac{\partial z}{\partial \eta}=0.$$

于是 $$z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y),$$

其中 φ 为任意函数.

【3459】 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,令 $\xi=x$,及 $\eta=x^2+y^2$.

解 由

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1,\frac{\partial \xi}{\partial y}=0,\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x,\frac{\partial \eta}{\partial y}=2y,$$

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta},\frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

把上述等式代入该题中的方程有

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0,$$

或 $$y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0.$$

由 $y\neq 0$ 有

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=0,$$

即 $$z=\varphi(\eta)=\varphi(x^2+y^2),$$

其中 φ 为任意的函数.

【3460】 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1(a\neq 0)$,令 $\xi=x$,及 $\eta=y-bz$.

解 由 $\xi=x,\eta=y-bz$,

有 $$d\xi=dx,d\eta=dy-bdz. \qquad ①$$

由 $z=z(\xi,\eta)$,

有 $$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dy-bdz),$$

$$\left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial \xi}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial \eta}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}\mathrm{d}x+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}\mathrm{d}y.$$

又由 $\quad z=z(x,y)$,

有 $\quad \mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

于是 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}.$

代入原方程有

$$a\frac{\partial z}{\partial \xi}+b\frac{\partial z}{\partial \eta}=1+b\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

即 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial \xi}=\dfrac{1}{a}.$

于是 $\quad z=\dfrac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\dfrac{x}{a}+\varphi(y-bz).$

【3461】 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$，令 $\xi=x$ 及 $\eta=\dfrac{y}{x}$.

解 由 $\xi=x,\eta=\dfrac{y}{x}$,

有 $\quad \dfrac{\partial \xi}{\partial x}=1,\dfrac{\partial \xi}{\partial y}=0,\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2},\dfrac{\partial \eta}{\partial y}=\dfrac{1}{x}.$

于是 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial z}{\partial \eta},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

把上式代入原方程有

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=z,x\frac{\partial z}{\partial \xi}=z,$$

或 $$\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z.$$

于是 $$z=\xi\varphi(\eta)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

取 u 和 v 作为新的自变量,变换以下方程(3462 ~ 3466).

【3462】 $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$,若 $u=\ln x$ 及 $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x},\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

把上式及

$$x=e^u,y=\mathrm{sh}v,$$

代入原方程有

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\mathrm{sh}v.$$

【3463】 $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$,若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $v=\arctan\frac{y}{x}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程有

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$-\frac{x-y}{x^2+y^2}\cdot\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

即 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【3464】 若 $u=\dfrac{y}{x}$，$v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 由

$$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2},$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{r},$$

其中 $$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}y}{x}-\frac{y\mathrm{d}x}{x^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\mathrm{d}z+\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y+\frac{z}{r}\mathrm{d}z\right).$$

于是 $$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程有

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=(z+r)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$2(z+r)\frac{\partial z}{\partial v}=z+r.$$

若 $\qquad z+r=0,$

则有 $\qquad x^2+y^2=0.$

但 $x\neq 0$,于是 $z+r\neq 0$,从而有

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}.$$

【3465】 若 $u=2x-z^2$ 及 $v=\dfrac{y}{z}$,则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}.$$

解 $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x-2z\mathrm{d}z,\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}y}{z}-\dfrac{y}{z^2}\mathrm{d}z,$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(2\mathrm{d}x-z\mathrm{d}z)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}\mathrm{d}z\right),\end{aligned}$$

故 $\qquad \left(1+2z\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{y}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=2\dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}y,$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

代入原方程有

$$2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z}\left(1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\left(\frac{y}{z}-\frac{xy}{z^3}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{z},$$

把 $\quad y=zv,x=\dfrac{1}{2}(u+z^2)$ 代入上式有

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}.$$

【3466】 若 $u=x+z$ 及 $v=y+z$,则

$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z.$$

解 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial z}{\partial u}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)+\frac{\partial z}{\partial v}(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).$

故 $$\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

把$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，并利用

$$x+y+z=u+v-z,$$

有 $$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}=(u+v-z)\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(2v+u-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z.$$

【3467】 取新的自变量：

$$\xi=y+ze^{-x},\eta=x+ze^{-y}$$

变换$(z+e^{x})\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^{y})\frac{\partial z}{\partial y}-(z^{2}-e^{x+y})$.

解 由

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta$$

$$=\frac{\partial z}{\partial \xi}(\mathrm{d}y+e^{-x}\mathrm{d}z-ze^{-x}\mathrm{d}x)+\frac{\partial z}{\partial \eta}(\mathrm{d}x+e^{-y}\mathrm{d}z-ze^{-y}\mathrm{d}y),$$

有 $$\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}.$$

代入原式有

$$原式=\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

【3468】 假定:$x=uv,y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$.

变换式子:$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

解 由

$$dx=vdu+udv,dy=udu-vdv,$$

有
$$du=\frac{vdx+udy}{u^2+v^2},dv=\frac{udx-vdy}{u^2+v^2}.$$

于是
$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\\&=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}(vdx+udy)+\frac{\partial z}{\partial v}(udx-vdy)\right]\\&=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\\&=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right].\end{aligned}$$

【3469】 在方程式$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$中,假定$\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

三式相加有

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

【3470】 取 x 作为函数，y 和 z 作为自变量，变换方程：

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解　由 $\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}z,\mathrm{d}z=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\mathrm{d}x-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}\mathrm{d}y,$

有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

代入原方程有

$$(x-z)\cdot\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}-y\cdot\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}=0,$$

即
$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y},(y\neq 0).$$

【3471】 取 x 作为函数，而 $u=y-z,v=y+z$ 作为自变量，变换方程：$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

解　由

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}y-\mathrm{d}z,\mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial x}{\partial u}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}z)+\frac{\partial x}{\partial v}(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z),$$

有
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}},$$

代入原方程，去分母有

$$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v},(v\neq 0).$$

【3472】 取 x 作为函数，$u=xz$，$v=yz$ 作为自变量，变换式子：$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$.

解 由 $\mathrm{d}u=x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}v=y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y$.

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial x}{\partial u}(x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x)+\frac{\partial x}{\partial v}(y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y).$$

有
$$\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)\mathrm{d}x-z\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-z\frac{\partial x}{\partial u}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\frac{\partial x}{\partial v}}{x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}},$$

代入原式有

$$A=\frac{\left(1-z\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2z\frac{\partial x}{\partial u}+z^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{1-2\cdot\frac{u}{x}\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{u}{x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{v}{u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{u^2\left\{x^2-2xu\frac{\partial x}{\partial u}+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]\right\}}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.$$

【3473】 在方程

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=x+y+z$$

中，假定 $\mathrm{e}^{\xi}=x-u$，$\mathrm{e}^{\eta}=y-u$，$\mathrm{e}^{\zeta}=z-u$.

解 由

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{e}^{-\xi}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}u)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{e}^{-\eta}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}u)+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathrm{e}^{-\zeta}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}u),$$

有

$$\left(1+\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathrm{d}z.$$

把$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$代入原方程有

$$(y+z+u)\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(x+z+u)\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+(x+y+u)\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$=(x+y+z)\left(1+\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right).$$

消去同类项有

$$(x-u)\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+(y-u)\mathrm{e}^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$+(z-u)\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}+(x+y+z)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+\mathrm{e}^{\xi}+\mathrm{e}^{\eta}+\mathrm{e}^{\zeta}=0.$$

在下列方程中代入新的变量u,v,w. 其中$w=w(u,v)$(3474～3477).

【3474】 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$

令 $u=x^2+y^2,v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},w=\ln z-(x+y).$

解 由

$$\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y,\mathrm{d}v=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}w=\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

又 $$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

于是 $$\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\right).$$

从而 $$\mathrm{d}z=\left(2xz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)\mathrm{d}x+\left(2yz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+z\right)\mathrm{d}y.$$

把$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程有

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)$$
$$=(y-x)z,$$

故 $$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

【3475】 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

令 $$u=x,v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

解 由

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}w=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z,$$

有 $$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\right),$$

$$\mathrm{d}z=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

代入原方程,有

$$z^2\left(1-x^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2,$$

或　$$x^2z^2\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

由 $z\neq 0, x\neq 0$,故得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

【3476】 $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$

设　$u=yz-x, v=xz-y, w=xy-z.$

解　由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w&=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\mathrm{d}z\\&=\frac{\partial w}{\partial u}(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)+\frac{\partial w}{\partial v}(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z-\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

有　$$\begin{aligned}&\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)\mathrm{d}z\\&=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入原方程有

$$\begin{aligned}&(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)+(1-y^2)\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\\&=(x+yz)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right),\end{aligned}$$

于是　$$(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

易验证,由方程

$$1-x^2-y^2-z^2-2xyz=0,$$

所确定的隐函数不是原方程的解,从而

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

【3477】 $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$

令 $x=ue^w, y=ve^w, z=we^w$

解 由

$$\mathrm{d}x=e^w\mathrm{d}u+ue^w\mathrm{d}w, \mathrm{d}y=e^w\mathrm{d}v+ve^w\mathrm{d}w,$$
$$\mathrm{d}z=e^w(1+w)\mathrm{d}w.$$

有 $$e^w\mathrm{d}w=\frac{1}{1+w}\mathrm{d}z,$$

$$e^w\mathrm{d}u=\mathrm{d}x-ue^w\mathrm{d}w=\mathrm{d}x-\frac{u}{1+w}\mathrm{d}z,$$

$$e^w\mathrm{d}v=\mathrm{d}y-ve^w\mathrm{d}w=\mathrm{d}y-\frac{v}{1+w}\mathrm{d}z.$$

在 $\mathrm{d}w=\dfrac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v$ 的两边同乘 e^w，并把上述式子代入有

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+w}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\mathrm{d}x-\frac{u}{1+w}\mathrm{d}z\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\mathrm{d}y-\frac{v}{1+w}\mathrm{d}z\right),$$

即 $\left(1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x+(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y,$

于是 $$\left[ue^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right]^2+\left[ve^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2$$
$$=(we^w)^2(1+w)^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

消去 $[e^w(1+w)]^2$ 有

$$u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

【3478】 假定 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan z, w=x+y+z$ 其中 $w=w(u,v)$，变换式子：

$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

解 由 $\mathrm{d}w=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\dfrac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\right),$$

有
$$\left(1-\frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z$$
$$=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)\mathrm{d}y.$$

把由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$代入所给式子有

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{(x-y)\left(1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\frac{x-y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}$$
$$=\frac{\left(1-\cos^2 v\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{e}^{2u}}{\frac{\partial w}{\partial u}}.$$

【3479】 假定 $u=x\mathrm{e}^z, v=y\mathrm{e}^z, w=z\mathrm{e}^z$.
其中 $w=w(u,v)$,变换式子:
$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 由
$$\mathrm{d}w=\mathrm{e}^z(1+z)\mathrm{d}z=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v$$
$$=\frac{\partial w}{\partial u}(\mathrm{e}^z\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^z\mathrm{d}z)+\frac{\partial w}{\partial v}(\mathrm{e}^z\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^z\mathrm{d}z),$$
有
$$\left(1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$
从而
$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}.$$

【3480】 在方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z}$ 中,假定

$$\xi=\frac{x}{z},\eta=\frac{y}{z},\zeta=z,w=\frac{u}{z}$$

其中 $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

解 由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w&=\frac{z\mathrm{d}u-u\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{\partial w}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial w}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial w}{\partial\zeta}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{\partial w}{\partial\xi}\left(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial\eta}\left(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial\zeta}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

今对两端同乘 z^2 有

$$z\mathrm{d}u=z\frac{\partial w}{\partial\xi}\mathrm{d}x+z\frac{\partial w}{\partial\eta}\mathrm{d}y+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial\xi}-y\frac{\partial w}{\partial\eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)\mathrm{d}z.$$

把由上式确定的$\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程有

$$x\frac{\partial w}{\partial\xi}+y\frac{\partial w}{\partial\eta}+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial\xi}-y\frac{\partial w}{\partial\eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)=u+\frac{xy}{z},$$

也就是 $\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}=\dfrac{xy}{z^2}=\dfrac{\xi\eta}{\zeta}$.

把下列各题变换为极坐标 r 和 φ 表示,假定(3481 ~ 3486).

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi.$$

【3481】 $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解 由

$$\mathrm{d}x=\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}y=\sin\varphi\mathrm{d}r+r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

有 $$\mathrm{d}r=\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y,\mathrm{d}\varphi=\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x.$$

于是 $$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\\&=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{y}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{x}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases} \tag{⑨}$$

把公式 ⑨ 代入原式有

$$w = x\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) - y\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

【3482】 $w = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

解 把公式 ⑨ 代入有

$$w = x\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + y\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

【3483】 $w = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$

解
$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{u}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2. \end{aligned}$$

【3484】 $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 把 r,φ 看作中间变量,x,y 看作自变量,由

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 r &= \mathrm{d}(\mathrm{d}r) = \mathrm{d}\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}x + \frac{y}{r}\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) - \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) - \frac{1}{r^3}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)^2 \\ &= \frac{1}{r^3}(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 \varphi &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{d}\left(\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y - \frac{y}{r^2}\mathrm{d}x\right) = -\frac{2(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)}{r^3}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{2}{r^4}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y). \end{aligned}$$

于是
$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\mathrm{d}r^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\mathrm{d}\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}^2r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}^2\varphi$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)^2$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\cdot\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{r^3}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).$$

把上式右边按 $\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\mathrm{d}y^2$ 合并同类项，且与
$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2,$$

作比较有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\qquad ⑩$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{x^2-y^2}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\frac{xy}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{xy}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{x^2-y^2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

把公式 ⑩ 代入原式有
$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

【3485】 $w=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 把公式 10 代入原式有
$$w=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

【3486】 $w=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right).$

解 把公式 10 的 u 换成 z 代入原式有
$$w=\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}.$$

【3487】 在 $I = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$ 中，假定 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

解 对函数 u 和 v 分别用公式 9 有

$$I = \left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{y}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$- \left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

【3488】 引入新的自变量 $\xi = x - at, \eta = x + at$，解方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 由

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

又 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

有 $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

从而 $$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

其中 φ 及 ψ 为任意函数.

取 u 和 v 作为新的自变量,变换下列方程(3489 ~ 3500).

【3489】 $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

若 $u=x+2y+2$ 及 $v=x-y-1$.

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程有

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

【3490】 $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

若 $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 及 $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

【3491】 若 $u=\ln x, v=\ln y$,

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

（a,b,c 均为常数）.

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程有

$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

【3492】 若 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 及 $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{cases} \quad ⑪$$

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},v=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

同理有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$

又 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

于是由公式 ⑪ 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

又由 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0,$

知 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$

【3493】 若 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z=0.$$

解 由

$$x=e^u\cos v, y=e^u\sin v,$$

有 $x^2+y^2=e^{2u}, u=\ln\sqrt{x^2+y^2},$

$$\tan v=\frac{y}{x}, v=\arctan\frac{y}{x}.$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

从而由 3492 题有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z$$

$$=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=\left[\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z$$

$$=\mathrm{e}^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+m^2 z=0,$$

也就是　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2\mathrm{e}^{2u}z=0.$

【3494】　若 $u=x-2\sqrt{y}$ 及 $v=x+2\sqrt{y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}\qquad(y>0)$$

解　由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

由公式 ⑪ 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

【3495】　若 $u=xy$ 及 $v=\dfrac{x}{y}$，$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

解　由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=x,\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}.$$

由公式 ⑪ 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程有$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

【3496】 若 $u=x+y$ 及 $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程有

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

又 $$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{u}{xy},$$

即 $$xy=\frac{u}{v},$$

于是有 $$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}(x-y)^2$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2[(x+y)^2-4xy]$$

$$=v^2\left(u^2-4\frac{u}{v}\right)=uv(uv-4).$$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【3497】 若 $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2),v=xy.$

$$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程有

$$[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=4xy\frac{\partial z}{\partial u},$$

也就是 $$(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}.$$

【3498】 若 $u=x\tan\frac{y}{2}$ 及 $v=x$,

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\tan\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\tan^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\tan\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x^2}{4}\sec^4\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$+\frac{x}{2}\sec^2\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

代入原方程有

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(x\sin y\sec^2\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\sin^2 y\sec^2\frac{y}{2}\tan\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=\left(2x\tan\frac{y}{2}-2x\tan\frac{y}{2}\sin^2\frac{y}{2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=2x\tan\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x\tan\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

即 $$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

【3499】 若 $x=(u+v)^2$ 及 $y=(u-v)^2$,

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\qquad(x>0,y>0).$$

解 对 $x=(u+v)^2,y=(u-v)^2$,
求关于 x 和 y 的偏导数有

$$\begin{cases}1=2(u+v)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right),\\[2ex]0=2(u-v)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right).\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=2(u+v)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right),\\[2ex]1=2(u-v)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right).\end{cases}$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}.$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{4(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{4(u+v)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{4(u+v)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$=-\frac{1}{8(u+v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{16(u+v)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

同理有 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{8(u-v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{16(u-v)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

代入原方程有

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$=-\frac{1}{8(u+v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$
$$+\frac{1}{8(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{4v}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{4u}{u^2-v^2}\frac{\partial z}{\partial v}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)=0,$$

也就是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

【3500】 若 $u=x$ 及 $v=y+z$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3.$$

解 由 $u=x, v=y+z$，

有 $$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x, \mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial v}(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).$$

于是 $$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}},$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}=1+\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}=\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}. \qquad ①$$

又
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{1-\frac{\partial z}{\partial v}}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial u}\right], \qquad ②$$

把 ① 和 ② 式代入原方程有

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1.$$

【3501】 用线性变换

$$\xi=x+\lambda_1 y,\eta=x+\lambda_2 y.$$

把方程：$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ ①

(其中 A,B 和 C 为常数，$c\neq 0$，以及 $AC-B^2<0$)，变换成以下形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0,$$

求满足方程 ① 的函数的一般形式.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

把他们代入原方程有

$$(A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2[A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$
$$+(A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

当 $\qquad A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2=0,A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2=0,$

即 λ_1,λ_2 为方程 $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$ 根时(且是两不相等实根),原方程变为

$$[A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

又 $\qquad \lambda_1+\lambda_2=-\frac{2B}{C},\lambda_1\lambda_2=\frac{A}{C},$

于是 $\qquad A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2=\frac{2(AC-B^2)}{C}\neq 0.$

从而 $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0,$

于是 $\qquad \frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi),$

且 $\qquad u=\int f(\xi)\mathrm{d}\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$
$$=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y).$$

【3502】 证明:拉普拉斯方程

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

在满足条件$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$的任何非退化变量变换$x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v)$下保持形式不变.

证 因为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v,\\ \mathrm{d}y=\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}u+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}v,\end{cases}$$

现令 $$I=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

由变换是非退化的有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}&\frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=I\neq 0.$$

解上述方程组有

$$\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}x-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}y\right),\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\mathrm{d}y,\end{cases}$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题过程和公式 ⑪,及

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{I^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{I},$$

有 $$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$
$$=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

即 $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

这就是说形式不变.

【3503】 假定$u=f(r)$,其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$,变换方程:

(1) $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

(2) $\Delta(\Delta u) = 0$.

解 (1) 由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}, \frac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r},$$

有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r^2}f''(r) + xf'(r)\cdot\left(-\frac{x}{r^3}\right)$$

$$= \frac{x^2}{r^2}f''(r) + \frac{y^2}{r^3}f'(r).$$

同理
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}f''(r) + \frac{x^2}{r^3}f'(r),$$

于是
$$\Delta u = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0,$$

也就是
$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0.$$

(2)
$$\Delta(\Delta u) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\Delta u)\right] = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}r^3} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}r^4} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0.$$

【3504】 若假定 $w = f(u)$，其中 $u = (x - x_0)(y - y_0)$，方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + cw = 0$ 会是什么形式？

解 由

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (y - y_0)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}, \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u} + u\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}u^2},$$

于是方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + cw = 0$，

变为 $$u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0.$$

【3505】 假定 $x+y=X,y=XY$. 变换式子:$A=x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 (1) 由

$$X=x+y,Y=\frac{y}{X}=\frac{y}{x+y}=1-\frac{x}{x+y},$$

有 $$\frac{\partial X}{\partial x}=1,\frac{\partial X}{\partial y}=1,\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{y}{(x+y)^2}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial X^2}-\frac{2y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2u}{\partial X\partial Y}+\frac{y^2}{(x+y)^4}\frac{\partial^2u}{\partial Y^2}+\frac{2y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial X^2}+\frac{x-y}{(x+y)^2}\frac{\partial^2u}{\partial X\partial Y}-\frac{xy}{(x+y)^4}\frac{\partial^2u}{\partial Y^2}-\frac{x-y}{(x+y)^3}\frac{\partial u}{\partial Y}.$$

代入原式有 $A=X\frac{\partial^2u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}$.

【3506】 证明:方程

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0,$$

在变量变换 $x=uv$ 而 $y=\frac{1}{v}$ 下保持形式不变.

证 由 $v=\frac{1}{y},u=\frac{x}{v}=xy$,

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

代入原方程有

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2xy^3\frac{\partial z}{\partial u}+2x(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$-2(y-y^3)\cdot\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}+x^2y^2z^2=0,$$

也就是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial u}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+u^2v^2z^2=0.$$

即其形状不变.

【3507】 证明方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

在变量变换 $u=x+z$ 及 $v=y+z$ 下不改变自己的形式.

证 把 u,v 看作中间变量,x,y 看作自变量,于是有

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}z,\qquad \mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z,\qquad \mathrm{d}^2u=\mathrm{d}^2v=\mathrm{d}^2z.$$

从而 $$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z+\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}y.$$

令 $$A=1-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v},$$

于是 $$\mathrm{d}z=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}y,$$

且 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{A}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

从而 $$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}z=\frac{1-\dfrac{\partial z}{\partial v}}{A}\mathrm{d}x+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial v}}{A}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{A}\mathrm{d}x+\frac{1-\dfrac{\partial z}{\partial u}}{A}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2+\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}^2u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}^2v.$$

即
$$Ad^2z=\frac{1}{A^2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]^2\right.$$
$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\frac{\partial z}{\partial v}dy\right]\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx\right.$$
$$\left.\left.+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left[\frac{\partial z}{\partial u}dx+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)dy\right]^2\right\}$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{A^3}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{A^3}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial z}{\partial v}\left(1-\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right].$$

代入原方程有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

也就是其形状不变.

【3508】 假定 $x=\eta\zeta, y=\xi\zeta, z=\xi\eta$. 变换方程:

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=0.$$

解 由

$$\begin{cases}1=\zeta\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial\zeta}{\partial x},\\[2mm] 0=\zeta\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\xi\dfrac{\partial\zeta}{\partial x},\\[2mm] 0=\eta\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\xi\dfrac{\partial\eta}{\partial x}.\end{cases}$$

有
$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\xi}{2\eta\zeta},\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2\zeta},\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{2\eta}.$$

同理有
$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{1}{2\zeta},\frac{\partial\eta}{\partial y}=-\frac{\eta}{2\xi\zeta},\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{1}{2\xi}.$$

于是
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
$$=-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi}{2\eta\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{2\eta\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$+\frac{1}{2\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\eta}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$
$$=-\frac{1}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{4\eta\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\eta}{4\xi\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{1}{4\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}. \quad ①$$

同法有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{4\eta\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\eta}{4\xi^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$-\frac{1}{4\xi^2\eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\zeta}{4\xi^2\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}, \quad ②$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{1}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{4\xi\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{4\xi\zeta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$-\frac{1}{4\eta^2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\zeta}{4\eta^2\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{2\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}. \quad ③$$

把 ①,②,③ 及 x,y,z 代入原方程有
$$\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$$
$$=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\right),$$

于是
$$\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$
$$=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}+\zeta\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\right).$$

【3509】 假定 $y_1=x_2+x_3-x_1$, $y_2=x_1+x_3-x_2$, $y_3=x_1+x_2-x_3$.

变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_3}=0.$$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}=\left(-\dfrac{\partial}{\partial y_1}+\dfrac{\partial}{\partial y_2}+\dfrac{\partial}{\partial y_3}\right)z,$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z,\quad \frac{\partial z}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)z.$$

把它们代入原方程有

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}+\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(2\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)\\
&=2\Big[\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_3}+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_1}\\
&\quad+\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{\partial z}{\partial y_2}\Big]\\
&=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}\right).
\end{aligned}$$

于是 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0.$

【3510】 假定 $\xi=\dfrac{y}{x},\eta=\dfrac{z}{x},\zeta=y-z.$

变换方程：

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0.$$

提示:把方程式写成 $A^2u-Au=0.$

其中 $A=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}.$

解 令 $A=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z},$

于是 $Au=\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)u.$

故 $$A^2u=A(Au)=x\frac{\partial}{\partial x}(Au)+y\frac{\partial}{\partial y}(Au)+z\frac{\partial}{\partial z}(Au)$$

$$=x\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

$$+y\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$

$$+z\left(x\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+z\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u+Au.$$

于是,原方程变为

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=0,$$

即 $$A^2u-Au=0.$$

但 $$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)+z\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$=(y-z)\frac{\partial u}{\partial \zeta}=\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$A^2u=A(Au)=\left(\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)Au=\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

因此 $$A^2u-Au=\zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

由 $\zeta\neq 0$,有原方程变为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0$.

【3511】 假定 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$.
将式子: $\Delta_1 u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

及 $$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

变换成球坐标所表示的式子.

提示:把变量变换写成两个部分变换的合成:

$$x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = z$$

和 $$R = r\sin\theta, \varphi = \varphi, z = r\cos\theta.$$

解 设 $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = z$,

由 3483 和 3484 题结论,有

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

令 $R = r\sin\theta, \varphi = \varphi, z = r\cos\theta$,

即对 R,z 坐标作一次极坐标变换,于是由公式 ⑨ 有

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{R}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

再利用度 3483 和 3484 题的结论有

$$\begin{aligned}\Delta_1 u &= \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right].\end{aligned}$$

两次变换的乘积即为所给的变换,于是上述两式即为所求.

【3512】 在方程

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

中引入新函数 w,设 $w = z^2$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial y}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

把上述各式代入原方程有

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

形式不变.

取 u 和 v 作为新的自变量及 $w=w(u,v)$ 作为新函数,变换下列方程(3513 ~ 3520).

【3513】 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$,若 $u=\frac{x}{y},v=x,\omega=xz-y$

解 注记:3513 题到 3522 题均作变换

$$u=u(x,y),v=v(x,y),w=(x,y,z).$$

为此,我们导出一般公式.

把 u,v 看作中间变量. x,y 看作自变量,于是

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2,$$

$$\mathrm{d}^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2,$$

$$\mathrm{d}^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}^2z.$$

把 $\mathrm{d}w,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 代入下述全微分式

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

我们有 $$\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

于是 $$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right).\end{cases}\tag{12}$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 是原方程中旧变元间的偏导数,$\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}$ 是变换后新变元间的偏导数.把 $\mathrm{d}^2w,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}^2u,\mathrm{d}^2v$ 代入表示新变元关系的二阶全微分式

$$\mathrm{d}^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2+\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}^2u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}^2v,$$

再把式中的 $\mathrm{d}z$ 表成已求得的$\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.按 $\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}y^2$ 合并同类项,最后把所得的结果与表示旧变元系的全微分式

$$\mathrm{d}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2,$$

相比较有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\Big[&\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\\&+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\Big[&\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\\&+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\Big]. \tag{13}$$

本题若用如下解法更为方便：

由 $w=xz-y$,

有 $$\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial y}-1.$$

又 $w=w(u,v)$,

有 $$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u},$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}.$$

从而 $$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\right)=y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right)-y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{2}{x}-y^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{2}{x}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{2}{x}.$$

由$\frac{x}{y^3}\neq 0$,有原方程变为$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

【3514】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,若 $u=x+y,v=\frac{y}{x},\omega=\frac{z}{x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x},$

$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{x^2},\frac{\partial w}{\partial y}=0,\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x}.$

代入公式 ⑫ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x^2}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令 $$R=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}-\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$=w-(1+v)\cdot\frac{\partial w}{\partial v},$$

于是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(w-(1+v)\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial v}-(1+v)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right]\left[-\frac{1}{x}(1+v)\right]$$

$$=\frac{1}{x}(1+v)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

由 $$x\neq 0,1+v\neq 0,$$

知原方程为$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

【3515】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

若 $u=x+y, v=x-y, \omega=xy-z$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=1, \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y, \frac{\partial w}{\partial y}=x, \frac{\partial w}{\partial z}=-1,$$

代入公式 ⑫ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

令 $R=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y-2\frac{\partial w}{\partial u}=u-2\frac{\partial w}{\partial u},$

于是
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial R}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&=2\frac{\partial}{\partial u}\left(u-2\frac{\partial w}{\partial u}\right)=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.
\end{aligned}$$

从而方程为$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$.

【3516】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$,若 $u=\frac{x+y}{2}, v=\frac{x-y}{2}, \omega=ze^y$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}=-\frac{\partial v}{\partial y},$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0, \frac{\partial w}{\partial y}=ze^y, \frac{\partial w}{\partial z}=e^y.$$

代入公式 ⑫ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right), \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-z.$$

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$= e^{-y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right) = e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right) = z.$$

于是原方程变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = 2ze^{y} = 2w.$$

【3517】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,若 $u = x, v = x + y, \omega = x + y + z$.

解 由公式 ⑫ 易求

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v} - 1,$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}.$$

与 3514 题类似有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

$$\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{v}{u} - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{v}{u} - 1\right)\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$= \left(\frac{v}{u} - 1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

把上述结果代入原方程有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

【3518】 $(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$,若 $x =$

$\sin u, y=\sin v, z=e^{\omega}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}=\frac{e^{w}}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{w}}{\cos v}\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{w}}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{w}}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{\cos u}\left[\frac{e^{w}}{\cos u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{e^{w}}{\cos u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{e^{w}\sin u}{\cos^2 u}\frac{\partial w}{\partial u}\right]$$

$$=\frac{e^{w}}{\cos^2 u}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\tan u\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{w}}{\cos^2 v}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\tan v\frac{\partial w}{\partial v}\right],$$

又 $1-x^2=\cos^2 u, 1-y^2=\cos^2 v$,

把上述结果代入原方程有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0.$$

【3519】 $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{4}z=0(|x|<1)$ 若

$u=\frac{1}{2}(y+\arccos x), v=\frac{1}{2}(y-\arccos x), \omega=z\sqrt[4]{1-x^2}$

解 由公式⑫易求

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2(1-x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

于是 $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}\right]$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{xz}{2}\right]$$

$$=-\frac{x}{4(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{z}{2}+\frac{x^2 z}{4(1-x^2)}+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{z}{4(1-x^2)}+\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

又 $\qquad \arccos x=u-v, x=\cos(u-v),$

$$1-x^2=\sin^2(u-v),$$

把上述结果代入原方程有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}.$$

【3520】 $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\dfrac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$

$(|x|>|y|)$

若 $u=x+y, v=x-y, \omega=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

解 原方程改写为

$$\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3},$$

即 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^3}.$$

①

由公式 ⑫ 易求

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

于是 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{x}{(x^2-y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{4x^2z}{(x^2-y^2)^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3x^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

同理有 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{(x^2-y^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{z}{(x^2-y^2)^2}-\frac{3y^2z}{(x^2-y^2)^3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

把上述结果代入方程 ① 有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

【3521】 证明:任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0 \qquad (a,b,c\text{ 为常数}).$$

用代换

$$z=ue^{\alpha x+\beta y}.$$

(其中 α 和 β 均为常数值和 $u=u(x,y)$)可以简化成如下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c_1u=0 \qquad (c_1=\text{const}).$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\beta u+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{\alpha x+\beta y}\left(\alpha\beta u+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right).$$

把上述结论代入原方程有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(\beta+a)\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha+b)\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+(\alpha\beta+a\alpha+b\beta+c)u=0.$$

由题意,需 $\beta+a=0,\alpha+b=0$,

即 $\qquad \beta=-a,\alpha=-b.$

这是能做到的. 事实上,令

$$z=ue^{-(bx+ay)},$$

则原方程变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1u=0,c_1\text{ 为常数}.$$

【3522】 证明:在变量代换

$$x'=\frac{x}{y},y'=-\frac{1}{y},u'=\frac{u}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

(其中 u' 为变量 x' 和 y' 的函数)下方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 的形式不变.

证 $\mathrm{d}x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{y}-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y,\mathrm{d}y'=\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y,$

$$\ln u'=\ln u+\frac{1}{2}\ln y+\frac{x^2}{4y},$$

$$\mathrm{d}u' = \frac{u'}{u}\mathrm{d}u + \frac{u'}{2y}\mathrm{d}y + \frac{xu'}{2y}\mathrm{d}x - \frac{x^2u'}{4y^2}\mathrm{d}y.$$

把上面三个微分式代入

$$\mathrm{d}u' = \frac{\partial u'}{\partial x'}\mathrm{d}x' + \frac{\partial u'}{\partial y'}\mathrm{d}y',$$

有
$$\frac{u'}{u}\mathrm{d}u + \frac{u'}{2y}\mathrm{d}y + \frac{xu'}{2y}\mathrm{d}x - \frac{x^2u'}{4y^2}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\partial u'}{\partial x'}\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

于是
$$\mathrm{d}u = \left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y}\right)\mathrm{d}x$$
$$+ \left(\frac{u}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y}\right)\mathrm{d}y.$$

从而
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y}, \qquad ①$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y}\right)$$
$$= \frac{u}{yu'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$- \frac{u}{yu'^2}\cdot\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{u}{2y} - \frac{x}{2y}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= \frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \left(\frac{1}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{x}{2y}\right)\cdot\left(\frac{u}{yu'}\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y}\right)$$
$$- \frac{u}{y^2u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 - \frac{u}{2y}$$
$$= \frac{u}{y^2u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{xu}{y^2u'}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y} \qquad ②$$

把 ①,② 代入原方程有

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'},$$

于是方程的形式不变.

【3523】 在方程：

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ 而 $q=\frac{\partial z}{\partial y}$) 中假定：$u=x+z, v=y+z, w=x+y+z$. 若 $w=w(u,v)$.

解 由

$$dz=p\,dx+q\,dy, u=x+z,$$
$$v=y+z, w=x+y+z,$$

有
$$du=dx+dz=(1+p)dx+q\,dy,$$
$$dv=dy+dz=p\,dx+(1+q)dy,$$
$$d^2u=d^2v=d^2w=d^2z.$$

把上述结论代入新变元的全微分式

$$d^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v,$$

且令
$$S=1-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

有
$$Sd^2z=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}[(p+1)dx+q\,dy]^2$$
$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}[(p+1)dx+q\,dy][p\,dx+(q+1)dy]$$
$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}[p\,dx+(q+1)dy]^2.$$

把上式与 $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$,

作比较有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{S}\left[(1+p)^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2p(1+p)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+p^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{S}\left[q(p+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(1+p+q+2pq)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+p(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{S}\left[q^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2q(q+1)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+(q+1)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right].$$

代入原方程,并利用

$$\begin{aligned}&q(1+q)(1+p)^2-(1+p+q+2pq)q(p+1)+p(1+p)q^2\\&=q(1+p)[(1+p)(1+q)-(1+p+q+2pq)+pq]\\&=0,\\&p^2q(1+q)-(1+p+q+2pq)p(q+1)\\&+p(1+p)(q+1)^2=0,\\&2p(1+p)q(1+q)-(1+p+q+2pq)^2\\&+2q(q+1)p(1+p)=-(1+p+q)^2,\end{aligned}$$

我们有 $$-\frac{(1+p+q)^2}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0,$$

或 $$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0.$$

【3524】 在方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

中假定 $x=e^{\xi},y=e^{\eta},z=e^{\zeta},u=e^{w}$. 其中 $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dw}\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{e^w}{x}\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

即 $$x\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad ①$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=e^w\frac{\partial w}{\partial \eta},z\frac{\partial u}{\partial z}=e^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

① 式两边对 x 求偏导数有

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\frac{d\xi}{dx}+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{d\xi}{dx},$$

两边同乘 x 有

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad ②$$

同理有 $$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}-e^w\frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad ③$$

$$z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\mathrm{e}^w\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2+\mathrm{e}^w\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-\mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial \zeta^2},\qquad ④$$

把 ②,③,④ 三式代入原方程有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}$$

$$=(\mathrm{e}^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right]+\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

【3525】 证明:方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$$

的形式与变量 x,y 和 z 之间的关系无关.

证 令 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x},q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

则 $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$,

若以 x 为新函数有

$$\mathrm{d}^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2+\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}^2y+\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}^2z,$$

把作为旧变元的关系:

$$\mathrm{d}^2x=0,\mathrm{d}^2y=0,\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y,$$

代入上式有

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\cdot(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)^2\right].$$

于是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-p\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right),\qquad ①$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-p\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right),\qquad ②$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right).\qquad ③$$

代入原方程有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$=p^2\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2$$

$$=p^4\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2\right]=0.$$

从而 $$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=0.$$

同理,若以 y 作为函数有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}\right)^2=0.$$

即方程的形状与变量 x,y 和 z 所分别担任的角色无关.

【3526】 取 x 作为变量 y 和 z 的函数,解方程:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 把 3525 题中的 ①,②,③ 三式和

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial y}{\partial z},$$

代入有 $$q^2\left(-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+2pq\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+p^2q\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)$$

$$-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2pq\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)=-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0.$$

从而$\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$,或 $p=0$,又由$\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 得原方程为 $x=\varphi(z)y+\psi(z)$,其中 φ,ψ 为任意函数,由 $p=0$,有 $z=f(y)$,f 为任意函数,它也是原方程的解.

【3527】 取勒让德变换

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},Y=\frac{\partial z}{\partial y},Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

(其中 $Z=Z(X,Y)$) 变换方程式:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z&=\mathrm{d}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y-\mathrm{d}z+x\mathrm{d}X+y\mathrm{d}Y=x\mathrm{d}X+y\mathrm{d}Y,\end{aligned}$$

于是有 $\dfrac{\partial Z}{\partial X}=x,\dfrac{\partial Z}{\partial Y}=y.$

对上式求微分有

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\mathrm{d}X+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}Y,\\ \mathrm{d}y=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}X+\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\mathrm{d}Y.\end{cases}\qquad ①$$

又由 $X=\dfrac{\partial z}{\partial x},Y=\dfrac{\partial z}{\partial y},$

微分有
$$\begin{cases}\mathrm{d}X=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}Y=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y.\end{cases}\qquad ②$$

由 ① 式与 ② 式有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}&\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}&\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}X\\ \mathrm{d}Y\end{pmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}&\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}&\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}&\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

于是
$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}&\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}&\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}&\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

从而
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 1.$$

因此
$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是,由 ① 式有
$$\begin{cases} \mathrm{d}X = I^{-1}\left(\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\mathrm{d}x - \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}y\right), \\ \mathrm{d}Y = I^{-1}\left(-\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\right)\mathrm{d}y. \end{cases} \qquad ③$$

比较 ② 式和 ③ 式有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = I^{-1}\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2},$$

代入方程有 $A(X,Y)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X,Y)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} + C(X,Y)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$

§ 5. 几何上的应用

1. **切线和法平面** 曲线
$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$$
在 $M(x,y,z)$ 点处的切线方程为
$$\frac{X-x}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{Y-y}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{Z-z}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}$$

在这个点上法平面的方程:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(X-x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(Y-y) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(Z-z) = 0.$$

2. **切平面和法线** 在 $M(x,y,z)$ 点曲面 $z = f(x,y)$ 的切

平面方程为

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

在 M 点法线的方程是：

$$\frac{X - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-1}.$$

若曲面方程式给定为隐函数的形式 $F(x,y,z) = 0$. 则相应地有

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

— 切面方程式

和 $$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$ — 法线方程式.

3. **平面曲线族的包络线**　单参数曲线族 $f(x,y,\alpha) = 0$（α 为参数）的包络线满足方程组

$$f(x,y,\alpha) = 0, f'_{\alpha}(x,y,\alpha) = 0.$$

4. **曲面族的包洛面**　单参数曲面族 $F(x,y,z,\alpha) = 0$ 的包络面满足方程组：

$$F(x,y,z,\alpha) = 0, F'_{\alpha}(x,y,z,\alpha) = 0.$$

在双参数曲面族 $\Phi(x,y,z,\alpha,\beta) = 0$ 的情况下，包络面满足以下方程：$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta) = 0, \Phi'_{\alpha}(x,y,z,\alpha,\beta) = 0, \Phi'_{\beta}(x,y,z,\alpha,\beta) = 0$.

对于以下曲线，写出给定点切线和法向面的方程（3528 ～ 3532）.

【3528】　在点 $t = t_0, x = a\cos\alpha\cos t, y = a\sin\alpha\cos t, z = a\sin t$.

解　由线

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

在点 t_0 处的切向量为

$$\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

于是由 $x = a\cos\alpha\cos t, y = a\sin\alpha\cos t, z = a\sin t$,

有 $\vec{v}(t_0) = \{-a\cos\alpha\sin t_0, -a\sin\alpha\sin t_0, a\cos t_0\}$.

从而切线方程为

$$\frac{x - x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0} = \frac{y - y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0} = \frac{z - z_0}{a\cos t_0},$$

即 $$\frac{x - x_0}{-\cos\alpha\sin t_0} = \frac{y - y_0}{-\sin\alpha\sin t_0} = \frac{z - z_0}{\cos t_0}.$$

法平面方程为

$$(-a\cos\alpha\sin t_0)(x - x_0)$$
$$+(-a\sin\alpha\sin t_0)\cdot(y - y_0) + (a\cos t_0)(z - z_0) = 0,$$

其中 $x_0 = x(t_0) = a\cos\alpha\cos t_0$,

$y_0 = y(t_0) = a\sin\alpha\cos t_0$,

$z_0 = z(t_0) = a\sin t_0$.

经化简有 $x\cos\alpha\sin t_0 + y\sin\alpha\sin t_0 - z\cos t_0 = 0$,也就是法平面过原点.

【3529】 在点 $t = \pi/4, x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$.

解 $x_0 = a\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{b}{2}, z_0 = \frac{c}{2}$,

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \{a, 0, -c\},$$

于是切线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x - \dfrac{a}{2}}{a} = \dfrac{z - \dfrac{c}{2}}{-c}, \\ y = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1, \\ y = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

法平面方程为

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)+(-c)\left(z-\frac{c}{2}\right)=0,$$

即 $$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2).$$

【3530】 在点 $M(1,1,1)$, $y=x, z=x^2$.

解 设 $x=t$,

则 $$y=t, z=t^2.$$

于是 $\vec{v}(1)=\{1,1,2\}$,切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

法平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

即 $$x+y+2z=4.$$

【3531】 在点 $M(1,1,1)$, $x^2+z^2=10, y^2+z^2=10$.

解 基本思路:当曲线以两个曲面方程

$$F_1(x,y,z)=0, F_2(x,y,z)=0$$

交线形式给出时,可先求出两曲面在交点处的法向量

$$\vec{n}_1=\{F'_1x,\ F'_1y,\ F'_1z\},$$

$$\vec{n}_2=\{F'_2x,\ F'_2z,\ F'_2z\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}F'_1y & F'_1z\\ F'_2y & F'_2z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_1z & F'_1x\\ F'_2z & F'_2x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_1x & F'_1y\\ F'_2x & F'_2y\end{vmatrix}\right\}.$$

于是该题中

$$\vec{n}_1=\{2,0,6\}, \vec{n}_2=\{0,2,6\},$$

$$\vec{v}=\{1,0,3\}\times\{0,1,3\}=\{-3,-3,1\},$$

从而切线方程为

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1},$$

即 $$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}.$$

法平面方程为

$$-3(x-1)-3(y-1)+(z-3)=0,$$

即 $3x+3y-z=3.$

【3532】 在 $M(1,-2,1)$,$x^2+y^2+z^2=6$,$x+y+z=0$.

解 由 $F_1=x^2+y^2+z^2-6=0$,

$$F_2=x+y+z=0,$$

有 $\vec{n}_1=2\{1,-2,1\}$,$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

$$\vec{v}=\{1,-2,1\}\times\{1,1,1\}=-3\{1,0,-1\}.$$

于是切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1},\\ y=-2.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+z=2,\\ y+2=0.\end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1)-(z-1)=0,$$

或 $x-z=0.$

【3533】 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上,求出使切线平行于平面 $x+2y+z=4$ 的点.

解 $\vec{v}=\{1,2t,3t^2\}$,平面法向量 $\vec{n}=\{1,2,1\}$,由题意

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=1+4t+3t^2=0,$$

从而 $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$,于是所求的点为 $M_1(-1,1,-1)$,$M_2\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

【3534】 证明:螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 的切线与 Oz 轴线成定角.

证 由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\sin t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\cos t,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=b,$$

于是有切线与 Oz 轴形成的角 γ 的余弦

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

从而 $\cos\gamma$ 为常数,故切线与 Oz 轴形成定角.

【3535】 证明:曲线 $x=a\mathrm{e}^t\cos t, y=a\mathrm{e}^t\sin t, z=a\mathrm{e}^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的所有母线相交的角度相同.

证 圆锥 $x^2+y^2=z^2$ 的顶点在原点,过圆锥上任一点 $P(x,y,z)$ 的母线也过原点,因此,母线的方向向量为 $\vec{v}_1=(x,y,z)$,曲线在点 P 的切向量为

$$\begin{aligned}\vec{v}_2&=(x',y',z')\\&=\{a\mathrm{e}^t(\cos t-\sin)t,a\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t),a\mathrm{e}^t\}\\&=(x-y,x+y,z).\end{aligned}$$

又 $x^2+y^2=z^2$,于是

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})&=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\\&=\frac{x(x-y)+y(x+y)+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}=\frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

从而交角相同.

【3536】 证明斜驶线

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=\mathrm{e}^{k\varphi}(k=\mathrm{const}),$$

(其中 φ 为地球上点的经度,ψ 为地球上点的纬度)与地球体的所有子午线成定角相交.

证 建立坐标系:赤道平面为 Oxy 平面,球心为坐标原点,Ox 轴正向过 0° 子午线,Oz 轴正向过北极,取 $Oxyz$ 坐标系为右手系.

下面建立斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程.假设讨论地球上的点的经度为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$,纬度为 $\psi\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

则它在上述标系下的坐标为

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\varphi, \\ y = R\cos\psi\sin\varphi, \\ z = R\sin\psi. \end{cases}$$

其中 R 为地球半径,对 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)= e^{k\varphi}$ 两边求微分有

$$\frac{d\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)} = k e^{k\varphi} d\varphi = k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)d\varphi$$

于是
$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\psi} &= \left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\right]^{-1} = \frac{1}{k\cos\psi}. \end{aligned}$$

现把斜驶线方程看作 φ 和 ψ 的隐函数,因此在(φ_0,ψ_0)点处有

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} &= -R\sin\psi_0\cos\varphi_0 - R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi} \\ &= -R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{\sin\varphi_0}{k}\right), \\ \frac{dy}{d\psi} &= -R\sin\psi_0\sin\varphi_0 + R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi} \\ &= -R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0 - \frac{\cos\varphi_0}{k}\right), \\ \frac{dz}{d\psi} &= R\cos\psi_0. \end{aligned}$$

从而,可取斜驶线切向量

$$\vec{v}_1 = \left\{\sin\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{\sin\varphi_0}{k}, \sin\varphi_0\sin\psi_0 - \frac{\cos\varphi_0}{k}, -\cos\psi_0\right\},$$

当 φ 为常数时,即得子午线,其参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\varphi_0, \\ y = R\cos\psi\sin\varphi_0, \\ z = R\sin\psi. \end{cases}$$

于是子午线在点(φ_0,ψ_0)的切向量为

$$\vec{v}_2=\{\sin\psi_0\cos\varphi_0,\sin\psi_0\sin\varphi_0,-\cos\psi_0\},$$

从而有 $$\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\text{常数}.$$

故斜驶线与子午线相交成定角.

【3537】 求出在点$M_0(x_0,\ y_0)$曲线

$$z=f(x,\ y),\ \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

(其中f为微分函数)的切线与Oxy平面所成的角度的正切.

解 把曲线看作两条曲线的交线,则所给曲线在M_0点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}f'_y(x_0,y_0) & -1\\ -\frac{1}{\sin\alpha} & 0\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}-1 & f'_x(x_0,y_0)\\ 0 & \frac{1}{\cos\alpha}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0)\\ \frac{1}{\cos\alpha} & -\frac{1}{\sin\alpha}\end{vmatrix}},$$

即 $$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha},$$

因此,切线与Oxy平面所成角φ的正切为

$$\tan\varphi=\frac{f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

【3538】 求函数$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在点$M(1,\ 2,\ -2)$沿曲线

$$x=t,y=2t^2,z=-2t^4,$$

在该点的切线方向上的导数.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

在点 $M(1,2,-2)$ 它们的值分别为$\dfrac{8}{27},-\dfrac{2}{27},\dfrac{2}{27}$,又曲线在该点的切线的方向余弦为$\dfrac{1}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{8}{9}$. 从而所求的导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{2}{27}\right)\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{16}{243}.$$

对于下列曲面，写出指定点的切面和法线方程(3539 ~ 3547).

【3539】 在点 $M_0(1,2,5)$,$z=x^2+y^2$.

解 思路:当曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出时,法向量为 $\vec{n}=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}$. 特别曲面由显式方程 $z=f(x,y)$ 给出时,法向量 $\vec{n}=\{f'_x,f'_y,-1\}$,本题中,

$$\vec{n}=\{2x,2y,-1\}\Big|_{M_0}=\{2,4,-1\}.$$

于是,切面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,$$

即 $\qquad 2x+4y-z=5.$

法线方程为$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

【3540】 在点 $M_0(3,4,12)$,$x^2+y^2+z^2=169$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-169=0$,

则在点 n_0 处

$$\vec{n}=\{2x,2y,2z\}\Big|_{M0}=\{6,8,24\}=2\{3,4,12\}.$$

于是切面方程为

$$3(x-3)+4(y-4)+12(z-12)=0,$$

即 $$3x+4y+12z=169.$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12},$$

即 $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}.$$

【3541】 在点 $M_0\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$, $z=\arctan\frac{y}{x}$.

解 $\vec{n}=\left\{\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},-1\right\}\Big|_{M_0}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right\}$,

于是,切面方程为

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1),$$

即 $$z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y),$$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$.

【3542】 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $ax^2+by^2+cz^2=1$.

解 $\vec{n}=2\{ax_0,by_0,cz_0\}$,于是,切面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

又 $$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1,$$

故切面方程可写为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

【3543】 在点 $M_0(1,1,1)$, $z=y+\ln\frac{x}{z}$.

解 $F(x,y,z)=y+\ln x-\ln z-z=0$,

$$\vec{n}=\left\{\frac{1}{x},1,-\frac{1}{z}-1\right\}\Big|_{M_0}=\{1,1,-2\},$$

于是，切面方程为

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0,$$

即 $\qquad x+y-2z=0.$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}.$

【3544】 在点 $M_0(2,2,1)$，$2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8.$

解 $F(x,y,z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8,$

$$\vec{n}=\left\{\frac{1}{z}2^{\frac{x}{z}}\ln2,\frac{1}{z}2^{\frac{y}{z}}\ln2,(x\cdot 2^{\frac{x}{z}}+y\cdot 2^{\frac{y}{z}})\left(-\frac{1}{z^2}\ln2\right)\right\}\bigg|_{M_0}$$

$$=4\ln2\{1,1,-4\},$$

于是，切面方程为 $(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0,$

即 $\qquad x+y-4z=0.$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}.$

【3545】 在点 $M_0(\varphi_0,\psi_0)$，$x=a\cos\psi\cos\varphi$，$y=b\cos\psi\sin\varphi$，$z=c\sin\psi$.

解 思路：当曲面由参数方程

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),$$

给出时，曲面上分别令 $u=u_0$，$v=v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\},\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

切面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}$$

于是对本题

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial \varphi},\frac{\partial y}{\partial \varphi},\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\}\bigg|_{M_0}$$

$$=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0,b\cos\psi_0\cos\varphi_0,0\}$$

$$= \cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0, b\cos\varphi_0, 0\},$$

$$\vec{v}_2 = \left\{\frac{\partial x}{\partial\psi}, \frac{\partial y}{\partial\psi}, \frac{\partial z}{\partial\psi}\right\}\bigg|_{M_0}$$

$$= \{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0, -b\sin\psi_0\sin\varphi_0, c\cos\psi_0\},$$

$$n = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = abc\left\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}, \frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}, \frac{\sin\psi_0}{c}\right\}.$$

于是切面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x - a\cos\psi_0\cos\varphi_0) + \frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}\cdot(y - b\cos\psi_0\sin\varphi_0)$$

$$+\frac{\sin\psi_0}{c}(z - c\sin\psi_0) = 0,$$

即 $$\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0 + \frac{z}{c}\sin\psi_0 = 1.$$

法线方程为

$$\frac{x - a\cos\psi_0\cos\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}} = \frac{y - b\cos\psi_0\sin\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}} = \frac{z - c\sin\psi_0}{\frac{\sin\psi_0}{c}},$$

即 $$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0 - b}{ac} = \frac{z\csc\psi_0 - c}{ab}.$$

【3546】 在点 $M_0(\varphi_0, r_0)$，$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = r\cot\alpha$.

解 $$\vec{v}_1 = \left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}\bigg|_{M_0} = r_0\{-\sin\varphi_0, \cos\varphi_0, 0\},$$

$$\vec{v}_2 = \left\{\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right\}\bigg|_{M_0} = \{\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, \cot\alpha\},$$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = r_0\{\cos\varphi_0\cot\alpha, \sin\varphi_0\cot\alpha, -1\}.$$

于是切面方程为

$$\cos\varphi_0\cot\alpha(x - r_0\cos\varphi_0)$$

$$+\sin\varphi_0\cot\alpha\cdot(y - r_0\sin\varphi_0) - (z - r_0\cot\alpha) = 0,$$

即

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\tan\alpha = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0\cot\alpha}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0\cot\alpha}=\frac{z-r_0\cot\alpha}{-1},$$

即
$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\cot\alpha}{-\tan\alpha}.$$

【3547】 在点 $M_0(u_0,v_0)$，$x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$.

解 $\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\}\bigg|_{M_0}=\{\cos v_0,\sin v_0,0\}$,

$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\}\bigg|_{M_0}=\{-u_0\sin v_0,u_0\cos v_0,a\}$,

$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\{a\sin v_0,-a\cos v_0,u_0\}$.

于是切面方程为

$$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-av_0)=0,$$

即
$$ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0.$$

法线方程为

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}.$$

【3548】 当切点 $M(u,v)(u\neq v)$ 无限接近于曲面边界线 $u=v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$ 时，求下列曲面的切平面极限位置：

$$x=u+v,\qquad y=u^2+v^2,\qquad z=u^3+v^3.$$

解 $\vec{n}(u,v)=\{1,2u,3u^2\}\times\{1,2v,3v^2\}$

$=(v-u)\{6uv,-3(u+v),2\}$,

则 $\vec{n}$ 方向上的单位向量为

$$\vec{n}^0(u,v)=\left\{\frac{6uv}{l},-\frac{3(u+v)}{l},\frac{2}{l}\right\},$$

其中 $l=\sqrt{36u^2v^2+9(u+v)^2+4}$.

于是 $\lim\limits_{\substack{u\to u_0\\v\to v_0}}\vec{n}^0=\left\{\frac{6u_0^2}{l_0},-\frac{6u_0}{l_0},\frac{2}{l_0}\right\}$,

其中 $l_0=\sqrt{36u_0^4+36u_0^2+4}$.

而 $M_0(u_0,v_0)=(2u_0,2u_0^2,2u_0^3)$,

于是切面在 M_0 点的极限位置为

$$3u_0^2x-3u_0y+z=3u_0^2(2u_0)-3u_0(2u_0^2)+2u_0^3=2u_0^3,$$

即 $$\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2.$$

【3549】 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上，求出切平面平行于坐标平面的所有切点.

解 $\vec{n}=\{2(x+y+z),2(x+2y+2z),2(x+2y+3z)\}$，

当 $$\begin{cases}x+y+z=0,\\x+2y+2z=0,\\x+2y+3z=\lambda.\end{cases}$$

时，$\vec{n}$ 与 $\vec{k}=(0,0,1)$ 平行. 即切平面平行于 Oxy 平面，解上述方程有 $x=0,y=-\lambda,z=\lambda$. 把求得的 x,y,z 代入所给的曲面方程，有 $\lambda=\pm 2\sqrt{2}$，于是切平面平行于 Oxy 坐标平面的切点为 $(0,\pm 2\sqrt{2},\mp 2\sqrt{2})$. 同理有切平面平行于 Oxy 坐标平面和 Oxy 坐标平面的诸切点分别为 $(\pm 4,\mp 2,0)$ 及 $(\pm 2,\mp 4,\pm 2)$.

【3550】 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上怎样的点处的法线与坐标轴形成相等的角?

解 $\vec{n}=2\left\{\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right\}$，

由题意，有 $$\frac{\frac{x}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y}{b^2}}{l}=\frac{\frac{z}{c^2}}{l},\left(l=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\right).$$

即 $$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}=\lambda.$$

把上式代入椭球面方程有

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

于是，所求的点为

$$x=\pm\frac{a^2}{\mathrm{d}},y=\pm\frac{b^2}{\mathrm{d}},z=\pm\frac{c^2}{\mathrm{d}},$$

其中 $$\mathrm{d}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

【3551】 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各个切平面.

解 $\vec{n}=2\{x,2y,3z\}$,由题设有

$$x=\lambda,2y=4\lambda,3z=6\lambda.$$

即 $$x=\lambda,y=2\lambda,z=2\lambda.$$

把它们代入方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$,

得 $\lambda=\pm 1$,故切点为$(\pm 1,\pm 2,\pm 2)$,于是所求的切平面方程为

$$(x\mp 1)+4(y\mp 2)+6(z\mp 2)=0,$$

即 $$x+4y+6z=\pm 21.$$

【3552】 证明:曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的切平面与坐标面围成定体积的四面体.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则曲面在该点的切平面方程为 $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$,它与各坐标面的交点为 $A(3x_0,0,0)$,$B(0,3y_0,0)$,$C(0,0,3z_0)$.注意到各个坐标轴的垂直关系,即知以 A,B,C,D 各点为顶点的四面体的体积为

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}OC\cdot\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\right)=\frac{1}{6}3z_0\cdot 3x_0\cdot 3y_0$$

$$=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a^3.$$

它为一个常数.

【3553】 证明:曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$的切平面在坐标轴上割下若干段,它们的和等于常数.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则曲面在该点的切平方程为$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$,

即 $$\sqrt{y_0z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0y_0}\cdot(z-z_0)=0.$$

此切面在坐标轴上所割下的各线段分别为$\sqrt{ax_0}$,$\sqrt{ay_0}$,$\sqrt{az_0}$,其和 $$\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

它是常数。

【3554】 证明:锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$的切面通过它的顶点.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$,

于是,锥面在任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简有 $z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y$,

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$的顶点$(0,0,0)$.

【3555】 证明:旋转曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})(f'\neq 0)$ 的法线与它的旋转轴相交.

证 在旋转面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,其中

$$z_0=f(\sqrt{x_0^2+y_0^2}),$$

则曲面在该点的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right\}\Big|_{P_0}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\{x_0f',y_0f',-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\}.$$

于是,法线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0f'}=\frac{y-y_0}{y_0f'}=\frac{z-z_0}{-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

显然,法线通过 Oz 轴上的点

$$\left\{0,0,f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})+\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}\right\},$$

即法线和 Oz 轴相交.

【3556】 求椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在坐标面上的投影.

解 先考虑椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在 Oxy 平面上的射影,该射影即通过所给曲面上的每一点向 Oxy 平面作垂线所

得到的垂足的全体，它是 Oxy 平面上的一个区域，这个区域的边界由曲面上这样的点的投影构成：这一点向 Oxy 平面作的垂线在它的切面内（这里用到了椭球面的凸性），即该点的法线与 Oxy 平面平行，又该点的法向量为 $\{2x-y,2y-x,2z\}$，因此该点的坐标满足

$$\begin{cases}2z=0,\\ x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这些点的投影为

$$\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2-xy=1.\end{cases}$$

它即椭球在 Oxy 平面上射影的边界.

同理考虑切面与 Oxz 平面垂直，则有

$$2y-x=0.$$

因此，对 Oxz 平面投影为边界点的椭球面上的点应满足方程

$$\begin{cases}2y-x=0,\\ x^2+y^2+z^2-xy=1.\end{cases}$$

这是椭球面与平面的交线，将它改写为柱面与平面的交线

$$\begin{cases}2y-x=0,\\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2=1.\end{cases}$$

于是，椭球面在 Oxz 平面上射影的边界由方程

$$\begin{cases}y=0,\\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2=1\end{cases}$$

所确定. 同理可确定椭球面在 Oyz 平面上的射影的边界由方程

$$\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{3y^2}{4}+z^2=1\end{cases}$$

所确定，于是，椭圆球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在 Oxy 平面上的射影为圆：$x^2+y^2-xy\leqslant 1, z=0$，在 Oyz 平面上的射影为椭圆：$\dfrac{3}{4}y^2+z^2\leqslant 1, x=0$，在 Oxy 平面上的射影为椭圆 $\dfrac{3}{4}x^2+z^2\leqslant 1$，

$y=0$.

【3557】 把一个正方形$\{0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$分割成直径$\leqslant\delta$的有限个小块$\sigma$，若曲面$z=1-x^2-y^2$在属于同一小块$\sigma$的任意两点$P(x,y)$和$P_1(x_1,y_1)$的法线方向相差小于$1°$，求$\delta$数的上限.

解 令曲面在点$p(x,y)$，$p_1(x_1,y_1)$的法向量分别为$\vec{n}$，$\vec{n}_1$

则 $$\vec{n}=\{2x,2y,1\},\ |\vec{n}|\geqslant 1,$$
$$\vec{n}_1=\{2x,2y,1\},\ |\vec{n}_1|\geqslant 1,$$

且有 $$\vec{n}\times\vec{n}_1=\{2(y-y_1),2(x_1-x),4(xy_1-x_1y)\},$$
$$\sin(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_1})=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}\leqslant|\vec{n}\times\vec{n}_1|$$
$$=2\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2+4(xy_1-x_1y)^2}.$$

又 $$\begin{aligned}(xy_1-x_1y)^2&=[x(y_1-y)+y(x-x_1)]^2\\&\leqslant 2[x^2(y_1-y)^2+y^2(x-x_1)^2]\\&\leqslant 2[(y-y_1)^2+(x-x_1)^2],\end{aligned}$$

记 $$\rho=\sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2},$$

则有 $$\sin(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})\leqslant 2\sqrt{\rho^2+8\rho^2}=6\rho.$$

当$\varphi=(\widehat{\vec{n},\vec{n}_1})<1^0$时，$\varphi\approx\sin(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_1})$，于是，要$\varphi<\frac{\pi}{180}$，只要

$$6\rho<\frac{\pi}{180}\approx 0.003,$$

即可. 从而有$\delta<0.003$.

【3558】 设$z=f(x,y)$，这里$(x,y)\in D$ ①

为曲面方程，$\Phi(P_1,P)$为曲面①在$P(x,y)\in D$和$P_1(x_1,y_1)\in D$点上的法线之间的夹角.

证明：若域D有界且封闭，而函数$f(x,y)$在D域具有二阶有界导数，则李雅普诺夫的不等式：

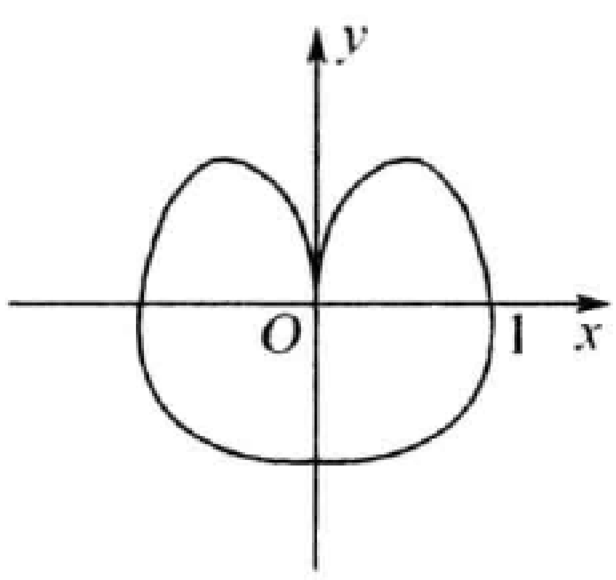
$$\varphi(P_1,P)<C_\rho(P_1,P) \qquad ②$$

成立,其中:C 为常数,$\rho(P_1,P)$ 为 P_1 和 P 点之间的距离.

证 该题缺少区域为凸的条件,否则结论不成立,如

$$z=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\quad x^2+y^2\leqslant 1,\\ y^3, & y>0,\quad x\geqslant y^4, x^2+y^2\leqslant 1,\\ -y^3, & y>0,\quad x\leqslant -y^4, x^2+y^2\leqslant 1.\end{cases}$$

如3558题图所示,函数在单位圆内缺个角的闭区域内有定义且有连续的二阶偏导数



3558 题图

取 $P_n\left(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)$ 与 $P'_n\left(-\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)$,则

$$\vec{n}=\vec{n}(P_n)=\{0,3y^2,-1\}\big|_{P_n}=\left\{0,\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\vec{n}'=\vec{n}(P'_n)=\{0,-3y^2,-1\}\Big|_{P'_n}=\left\{0,-\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\vec{n}\times\vec{n}'=\left\{-\frac{6}{n^2},0,0\right\},$$

$$\sin\varphi_n=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}\to 0,(n\to\infty).$$

又 $$\rho_n(P_n,P'_n)=\frac{2}{n^3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{6}{n^2}}{1+\dfrac{9}{n^4}}}{\dfrac{2}{n^3}} = +\infty,$$

于是不存在常数 C,使 $\varphi_n < C\rho_n$.

下面证明当 D 为凸的有界闭域时,不等式 ② 是正确的.

由 3255 题知:当 $f(x,y)$ 在 D 内有二阶连续的偏导数时,$\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 内皆为二元连续的,又因 D 有界,故$\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上皆有界,记

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < M, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M.$$

又由 3254 题的证明过程知:

当 D 是凸域,$f(x,y)$ 有有界二阶偏导数时,对 D 中任意两点 P 及 P_1,$\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 满足李普希兹条件,即存在常数 l,使

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right| < L\rho(P_1,P),$$

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right| < L\rho(P_1,P).$$

由
$$\vec{n}(P_1) = \left\{\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}, -1\right\},$$

$$\vec{n}(P) = \left\{\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, -1\right\},$$

知:对于 $\varphi = \varphi(P_1,P)$ 有下列不等式

$$\begin{aligned}\sin^2\varphi &= \frac{|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2}{|\vec{n}(P_1)|^2\,|\vec{n}(P)|^2} \leqslant |\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2 \\ &= \left[\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(P)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\end{aligned}$$

$$< L^2\rho^2 + L^2\rho^2$$
$$+ 2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2 \cdot \left[\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2$$
$$+ 2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2$$
$$< 2L^2\rho^2 + 2M^2L^2\rho^2 + 2M^2L^2\rho = 2L^2\rho^2(1+2M^2).$$

于是 $\sin\varphi < C_1\rho(P_1, P)$,

其中 $C_1^2 = 2L^2(1+2M^2)$.

从而有 $\varphi(P_1, P) < \frac{\pi}{2}\sin\varphi$ （1290 题结论）

$$< \frac{\pi}{2}C_1\rho(P_1, P) = C\rho(P_1, P),$$

其中 $C = \frac{\pi}{2}C_1$ 为常数，证毕.

【3559】 圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 与曲面 $bz = xy$ 在公共点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 相交成怎样的角？

解 两曲面在 M_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{y_0, x_0, -b\},$$

及 $$\vec{n}_2 = \{2x_0, 2y_0, 0\},$$

于是，交角 φ 满足

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{2x_0y_0 + 2x_0y_0 + 0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+b^2}\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}}$$
$$= \frac{4bz_0}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2a} = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

【3560】 证明：球坐标的坐标曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, y = x\tan\varphi,$$
$$x^2 + y^2 = z^2\tan^2\theta$$

两两正交.

证 各曲面在交点 $P(x, y, z)$ 处的法向量分别为

$$\vec{n}_1 = \{2x, 2y, 2z\},$$

$$\vec{n}_2 = \{\tan\varphi, -1, 0\},$$

$$\vec{n}_3 = \{2x, 2y, -2z\tan^2\theta\}.$$

由
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2x\tan\varphi - 2y = 2y - 2y = 0,$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 4x^2 + 4y^2 - 4z^2\tan^2\theta$$
$$= 4z\tan^2\theta - 4z\tan^2\theta = 0,$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 2x\tan\varphi - 2y = 0.$$

于是,这些曲面在其交点处分别两两正交.

【3561】 证明:球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, x^2 + y^2 + z^2 = 2by,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$$

形成三个正交系.

证 设

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax,$$

与
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2by,$$

交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点,则它们在 P_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{2(x_0 - a), 2y_0, 2z_0\},$$

$$\vec{n}_2 = \{2x_0, 2(y_0 - b), 2z_0\},$$

由
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4[x_0(x_0 - a) + y_0(y_0 - b) + z_0^2]$$
$$= 2[2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0]$$
$$= 2[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0)$$
$$+ (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2by_0)] = 0.$$

于是这两球在其交点处直交,同理,可证其它球的两两正交性.

【3562】 当 $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3$ 时,每一个点 $M(x, y, z)$ 有三个二阶曲面

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0),$$

证明这些曲面的正交性.

证 先证 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 的存在性.

令 $F(\lambda^2) = x^2(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) + y(a^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)$

$$+ z^2(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)$$
$$+ (a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)(c-\lambda^2).$$

则
$$F(a^2) = x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2) > 0,$$
$$F(b^2) = y^2(a^2-b^2)(c^2-b^2) < 0,$$
$$F(c^2) = z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2) > 0,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda^2) = -\infty.$$

因此，$F(\lambda^2)=0$ 在$(a^2,+\infty)$，(b^2,a^2)，(c^2,b^2)内各有一根，记为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2$，但 $F(\lambda^2)$ 是关于 λ^2 的三次多项式.

因此，也仅有三个实根 $\lambda_i^2(i=1,2,3)$，且知 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j,i,j=1,2,3)$，由 $F(\lambda_i^2)=0$ 不难得到

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}=-1,(i=1,2,3).$$

下面再证明这三个二次曲面是两两直交的，由于

$$\vec{n}_i=\left\{\frac{2x}{a^2-\lambda_i^2},\frac{2y}{b^2-\lambda_i^2},\frac{2z}{c^2-\lambda_i^2}\right\},(i=1,2,3),$$

及当 $i\neq j$ 时

$$\begin{aligned}\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j &= \frac{4x^2}{(a^2-\lambda_i^2)(a^2-\lambda_j^2)}+\frac{4y^2}{(b^2-\lambda_i^2)(b^2-\lambda_j^2)}\\ &\quad+\frac{4z^2}{(c^2-\lambda_i^2)(c^2-\lambda_j^2)}\\ &=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left[\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2}\right)\right.\\ &\quad\left.-\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_j^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_j^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_j^2}\right)\right]\\ &=\frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[(-1)-(-1)]=0.\end{aligned}$$

【3563】 求函数 $u=x+y+z$ 沿球面 $x+y+z=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 外法线方向上的导数.

在球体的什么点使上述导数具有：(a) 最大值，(b) 最小值，(c) 等于零？

解 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1,$

则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为

$$\left\{\frac{x_0}{r_0},\frac{y_0}{r_0},\frac{z_0}{r_0}\right\}=\{x_0,y_0,z_0\},$$

于是
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}$$
$$=\{1,1,1\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=x_0+y_0+z_0.$$

(1) 由 1294 题结论有

$$x_0+y_0+z_0=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0$$
$$\leqslant\sqrt{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{3}.$$

当 $x_0=y_0=z_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时,上述等式成立,此点恰在球面上,因此,在 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 处 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 取得最大值.

(2) 同理有

$$-(x_0+y_0+z_0)=(-1)x_0+(-1)y_0+(-1)z_0$$
$$\leqslant\sqrt{3},$$

即
$$x_0+y_0+z_0\geqslant-\sqrt{3}.$$

于是在点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 处,$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 取得最小值.

(3) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时,$\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$,因此,所求的点为由方程 $\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$ 所定的解 (x,y,z),它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线的圆上.

【3564】 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 外法线方向上的导数.

解 $\vec{n}=\left\{\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right\}$,

此法向量的单位向量为

$$\vec{n}^0 = \left\{\frac{x_0}{a^2A}, \frac{y_0}{b^2A}, \frac{z_0}{c^2A}\right\},$$

其中 $$A = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}.$$

于是 $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0} = \frac{x_0}{a^2A}\cdot 2x_0 + \frac{y_0}{b^2A}\cdot 2y_0 + \frac{z_0}{c^2A}\cdot 2z_0$$

$$= \frac{2}{A}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = \frac{2}{A} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

【3565】 设$\frac{\partial u}{\partial n}$和$\frac{\partial v}{\partial n}$为函数$u$和$v$在沿曲面$F(x,y,z)=0$上的点的法线方向上的导数. 证明:$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}$.

证 $$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(uv)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}(uv)\cos\gamma$$

$$= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

$$+ v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

$$= u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

求单参数平面曲线族的包络线(3566 ~ 3569).

【3566】 $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (p = \text{const}).$

解 令 $f(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$,

有 $$f'_\alpha(x,y,\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0,$$

消去 α 有 $x^2 + y^2 = p^2$. ①

由于原曲线族没有奇点,且 ① 也不是原曲线换的某一支,故 ① 为原曲线族的包线方程.

【3567】 $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

解 由

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2-\dfrac{a^2}{2}=0,\\ 2(x-a)+a=0.\end{cases}$$

消去 a 有 $y=\pm x$,与 3566 题的理由相同,它是包线方程.

【3568】 $y=kx+\dfrac{a}{k}\qquad(a=\text{const}).$

解 由

$$\begin{cases}kx-y+\dfrac{a}{k}=0,\\ x-\dfrac{a}{k^2}=0.\end{cases}$$

消去 k,有 $y^2=4ax$,与 3566 题的理由相同,它是包线方程.

【3569】 $y^2=2px+p^2.$

解 由

$$\begin{cases}2px-y^2+p^2=0,\\ x+p=0,\end{cases}$$

消去 p,有 $x^2+y^2=0$,它仅为一点(0,0),于是原曲线族无包络线.

【3570】 设线段长度为 l,其两端沿坐标轴滑动,求由此产生的线段族的包络线.

解 如 3570 题图所示,直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

但 $\qquad a=l\sin\theta,b=l\cos\theta,$

所以 $$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l. \tag{①}$$

对 θ 求导数有

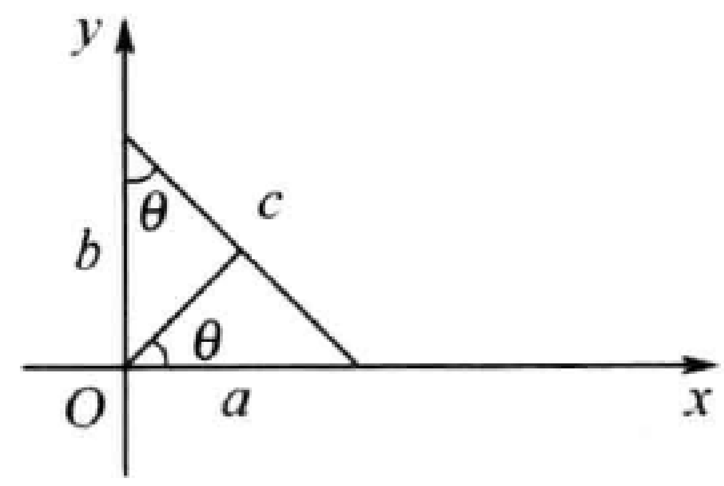
$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0,$$

即 $$\frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}. \tag{②}$$

由 ①,② 消去 θ,有

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}},$$

与 3566 题类似,它是包线方程.



3570 题图

【3571】 求具有固定面积 S 的椭圆族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的包络线.

解 设椭圆族为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

椭圆面积为 S,由题意有

$$\pi ab=S,$$

即 $$a=\frac{S}{\pi b}.$$

于是 $$\frac{\pi^2b^2x^2}{S^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad ①$$

对 b 求导数有

$$\frac{2\pi bx^2}{S^2}+\frac{2y^2}{b^3}=0. \qquad ②$$

由 ② 式

$$b^4=\frac{y^2S^2}{\pi^2x^2},b^2=\pm\frac{yS}{\pi x}.$$

把它们代入 ① 有

$$\pm\frac{\pi xy}{S}\pm\frac{\pi xy}{S}=1,$$

即 $$|xy|=\frac{S}{2\pi}.$$

与 3566 题类似,它是包线方程.

【3572】 导弹在真空中射出，其初始速度为 v_0. 当投射角在垂直平面上变化时，求导弹轨迹的包络线.

解 导弹轨道方程为

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

对 α 求导数，得

$$0 = \frac{x}{\cos^2\alpha} - \frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}. \tag{2}$$

由 ② 式得

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{xg},$$

代入 ① 式有

$$\begin{aligned} y &= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x\,\frac{v_0^2}{xg} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{x^2g^2}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \end{aligned}$$

与 3566 相似，这是包线方程.

【3573】 证明：平面曲线的法线的包络线是这条曲线的渐屈线.

证 设平面曲线由 $y = f(x)$ 表示，曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为

$$(X - x) + y'(X - y) = 0, \tag{1}$$

对 x 求导数有

$$-1 + y''(\overline{Y} - y) - y'^2 = 0,$$

即

$$y''(\overline{Y} - y) = 1 + y'^2. \tag{2}$$

由 ①，② 有

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ \overline{Y} = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}, \end{cases}$$

它是 $y = f(x)$ 的渐屈线方程. 由 3566 题的理由知，它是平面曲线

的法线的包线方程.

【3574】 研究下列曲线族的判别曲线性质(c 为变量参数):

(1) 立方抛物线 $y=(x-c)^3$;

(2) 半立方抛物线 $y^2=(x-c)^3$;

(3) 尼尔抛物线 $y^3=(x-c)^2$;

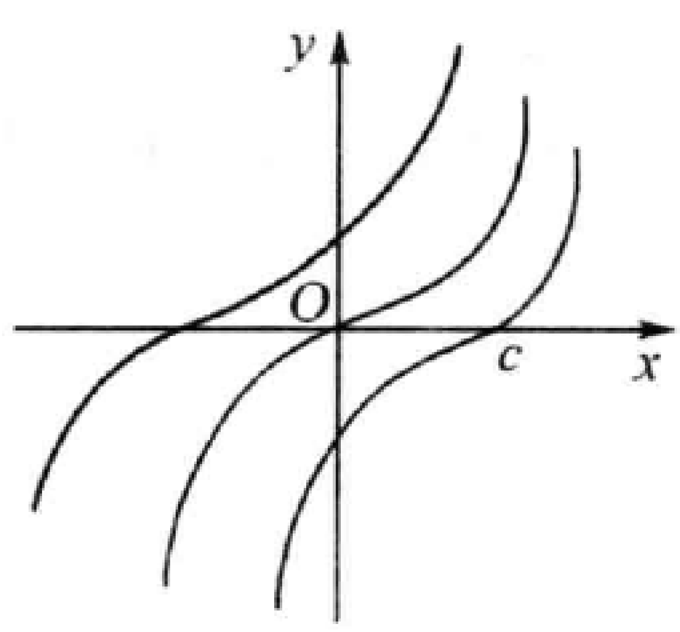
(4) 环索线 $(y-c)^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$.

解 (1) 由

$$\begin{cases}f(x,y,c)=y-(x-c)^3=0,\\ f'_c(x,y,c)=3(x-c)^2=0.\end{cases}$$

消去 c,得 $y=0$,它是判别曲线的方程.

原曲线无奇点,且 $y=0$ 也不是原曲线族的某一支,因此,它是包线,此包线与原曲线在 $(c,0)$ 点相切,且 $(c,0)$ 点是曲线的拐点,即它又是原曲线族拐点的轨迹如图 3574 题(1) 所示.



3574 题图(1)

(2) 由

$$\begin{cases}y^2-(x-c)^3=0,\\ 3(x-c)^2=0.\end{cases}$$

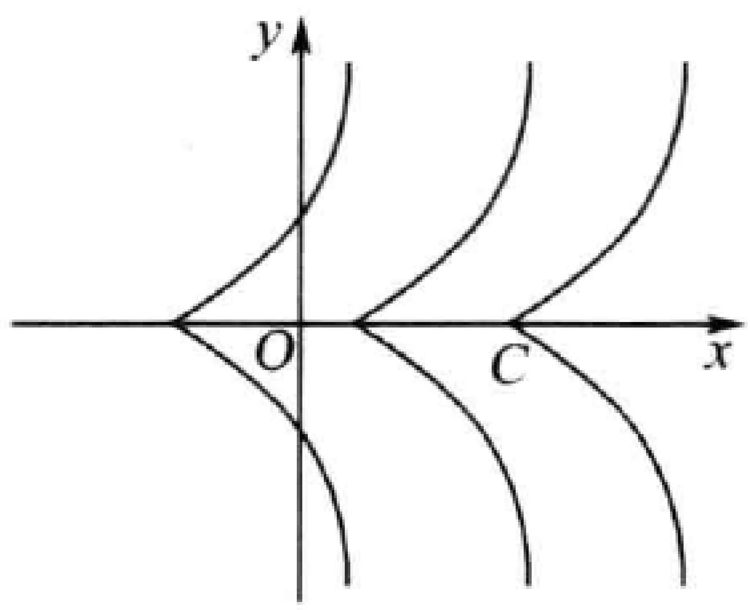
消去 c 有判别曲线 $y=0$,原曲线的奇点 $(c,0)$,因此它是奇点的轨迹,要看它是否为包线,还要看去奇点的两支是否与判别曲线相切. 事实上,两支分别为

$$y_1=(x-c)^{\frac{3}{2}},y_2=-(x-c)^{\frac{3}{2}},$$

皆有

$$y'_1(c)=0, y'_2(c)=0.$$

因此，$y=0$ 为原曲线族的包线，如 3574 题图(2) 所示.



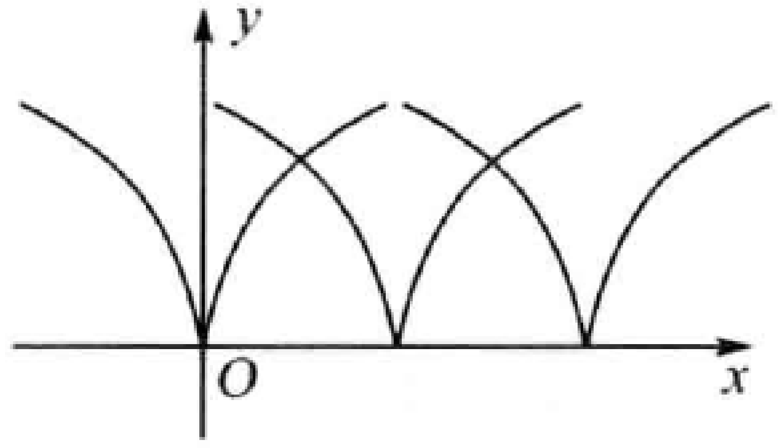
3574 题图(2)

(3) 由

$$\begin{cases} y^3-(x-c)^2=0, \\ 2(x-c)=0. \end{cases}$$

消去 c，得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点$(c,0)$，由于 $y=(x-c)^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=c$ 处的导数为无穷，因此，它与 $y=0$ 不相切，从而它无包线，奇点$(c,0)$ 为尖点，如 3574 题图(3) 所示.



3574 题图(3)

(4) 由

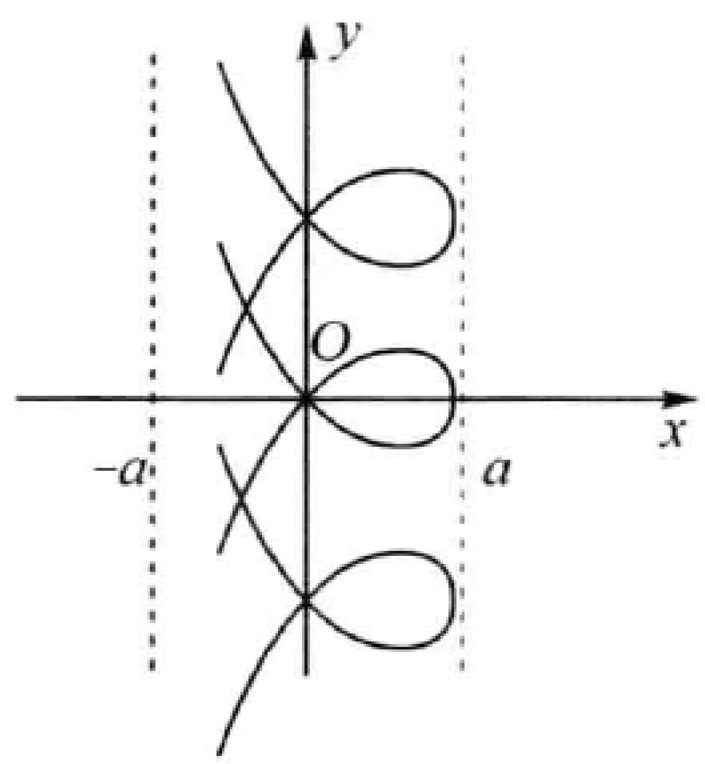
$$\begin{cases} (y-c)^2-x^2\dfrac{a-x}{a+x}=0, \\ -2(y-c)=0. \end{cases}$$

消去 c，有 $x^2(a-x)=0$，即判别曲线为直线 $x=0$ 和 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹，且是二重点的轨迹，事实上

$$A = f''_{xx}(0,c) = 2, B = f''_{xy}(0,c) = 0,$$
$$C = F''_{yy}(0,c) = -2, AC - B^2 = -4 < 0.$$

于是 $x = 0$ 不是包线，但在 $x = a$ 处 $f'_x(a,y) \neq 0 (a \neq 0)$，因此 $x = a$ 不是原曲线族奇点的轨迹，同时它又不是原曲线族的某一支，因此，$x = a$ 是原曲线族的包线，如 3574 题图(4) 所示.



3574 题图(4)

【3575】 确定半径为 r，其中心位于圆周 $x = R\cos t, y = R\sin t, z = 0$（ t 为参数，$R > r$）上的球族包络线.

解 由

$$\begin{cases}(X - R\cos t)^2 + (Y - R\sin t)^2 + Z^2 = r^2, & ① \\ 2R\sin t(X - R\cos t) - 2R\cos t(Y - R\sin t) = 0, & ②\end{cases}$$

把 ② 式化简有

$$X\sin t - Y\cos t = 0,$$

于是 $\tan t = \dfrac{Y}{Z}, \cos t = \pm \dfrac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$

$$\sin t = \pm \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad ③$$

把 ③ 式代入 ① 式有

$$(X^2 + Y^2)\left(1 \pm \frac{R}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)^2 + Z^2 = r^2.$$

当取“+”号时，由于 $R^2 > r^2$，故它不代表任何点的轨迹，当取

"—"号时,由于原曲面族无奇点,且$(\sqrt{X^2+Y^2}-R)^2+Z^2=r^2$不是原曲面族的某一个,因此,它是原曲面族的包面(圆环).

【3576】 求球族:

$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(2-t\cos\gamma)^2=1$的包络面,其中:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,$t$为参数.

解 由

$$\begin{cases}(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2-1=0,\\-2\cos\alpha(x-t\cos\alpha)-2\cos\beta(y-t\cos\beta)-2\cos\gamma(z-t\cos\gamma)=0.\end{cases}$$

据②式有

$$t=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma. \qquad ③$$

把③式代入①式有

$$x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=1. \qquad ④$$

由于原曲面族的奇点均不在此方程所表示的曲面上,并且曲面④也不是原曲面族中的某一个.因此,曲面④为原曲面族的包面.

【3577】 求体积V恒定的椭球面族$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的包络面.

解 令

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda abc,$$

于是包络面的方程由方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & ①\\ abc=\frac{3V}{4\pi}, & ②\\ F'_a=-\frac{2x^2}{a^3}+\lambda bc=0, & ③\\ F'_b=-\frac{2y^2}{b^3}+\lambda ac=0, & ④\\ F'_c=-\frac{2z^2}{c^3}+\lambda ab=0. & ⑤\end{cases}$$

确定，由 ③，④，⑤ 可解得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda abc}{2}=\mu. \qquad ⑥$$

把 ⑥ 式代入 ① 式有

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\mu=\frac{1}{3}.$$

于是 $a=\sqrt{3}\mid x\mid, b=\sqrt{3}\mid y\mid, c=\sqrt{3}\mid z\mid.$ ⑦

把 ⑦ 式代入 ② 式有

$$\mid xyz\mid=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \qquad ⑧$$

由于原曲面族无奇点，且曲面 ⑧ 也不是原曲面族中的某一个，于是知曲面 ⑧ 为原曲面族的包络面.

【3578】 求半径为 ρ，其中心位于圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的球族的包络面.

解 设球心为 (a,b,c)，则球面的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2,$$

其中 $a^2+b^2=c^2$. 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c),$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda(a^2+b^2-c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2, & ①\\ a^2+b^2=c^2, & ②\\ F'_a=-2(x-a)+2\lambda a=0, & ③\\ F'_b=-2(y-b)+2\lambda b=0, & ④\\ F'_c=-2(z-c)-2\lambda c=0. & ⑤\end{cases}$$

确定，由 ③，④，⑤ 有

$$\frac{x}{a}-1=\frac{y}{b}-1=-\frac{z}{c}+1=\lambda.$$

引入记号 $\frac{1}{\mu}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=2-\frac{z}{c}$，

则有 $$a=\mu x, b=\mu y, c=\frac{\mu z}{2\mu-1}, \tag{6}$$

把⑥式代入①,②两式,得

$$\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=\dfrac{\rho^2}{(\mu-1)^2}, & (7)\\ x^2+y^2-\dfrac{z^2}{(2\mu-1)^2}=0. & (8)\end{cases}$$

⑦+⑧有

$$2(x^2+y^2)=\frac{\rho^2}{(\mu-1)^2},$$

即 $$\sqrt{2}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,|2\mu-2|. \tag{9}$$

由⑧有

$$2\mu-1=\pm\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{10}$$

把⑩代入⑨有

$$\sqrt{2}\rho=\left|\sqrt{x^2+y^2}\pm z\right|. \tag{11}$$

由于原曲面族无奇点,且曲面⑪也不是原曲面族的某一个.因此,曲面⑪为原曲面族的包面.

【3579】 发光点位于坐标原点,若 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$,确定由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2,$$

投影生成的阴影锥体.

解 所求的阴影圆锥的表面,可看作是一个过原点的平面族的包面,此平面族的方程为

$$ax+by+cz=0,$$

其中 a,b,c 满足约束条件

$$\begin{cases}ax_0+by_0+cz_0=\pm R,\\ a^2+b^2+c^2=1.\end{cases}$$

引进辅助函数

$$\begin{aligned}&F(x,y,z,a,b,c)\\ &=ax+by+cz+\lambda(ax_0+by_0+cz_0)\end{aligned}$$

$$+\mu(a^2+b^2+c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, & ① \\ a^2+b^2+c^2=1, & ② \\ ax_0+by_0+cz_0=\pm R, & ③ \\ F'_a=x+\lambda x_0+2\mu a=0, & ④ \\ F'_b=y+\lambda y_0+2\mu b=0, & ⑤ \\ F'_c=z+\lambda z_0+2\mu c=0. & ⑥ \end{cases}$$

确定.方程 ④,⑤,⑥ 要能解出 λ,μ,其中 a,b,c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ z & z_0 & c \end{vmatrix}=0, \qquad ⑦$$

记

$$r_1=\begin{vmatrix} y & y_0 \\ z & z_0 \end{vmatrix}, r_2=\begin{vmatrix} z & z_0 \\ x & x_0 \end{vmatrix}, r_3=\begin{vmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{vmatrix},$$

则上述关系式可记为

$$ar_1+br_2+cr_3=0. \qquad ⑧$$

由 ①,③,⑧ 解得

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ \pm R & y_0 & z_0 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}=\frac{\pm R(zr_2-yr_3)}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)},$$

或

$$a^2=\frac{R^2(zr_2-yr_3)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}, b^2=\frac{R^2(xr_3-zr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},$$

$$c^2=\frac{R^2(xr_2-yr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}. \qquad ⑨$$

把 ⑨ 式代入 ② 式有

$$\begin{aligned}&(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2\\&=R^2[(yr_3-zr_2)^2+(xr_3-zr_1)^2+(xr_2-yr_1)^2]\\&=R^2[(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2)\\&\quad-(xr_1+yr_2+zr_3)^2]\\&=R^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

其中利用了

$$xr_1+yr_2+zr_3=0.$$

于是有

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=R^2(x^2+y^2+z^2). \qquad ⑩$$

由于原平面族无奇点，且曲面 ⑩ 不是平面族的某一个. 因此，曲面 ⑩ 即为包面，所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域，同时要除去球前部的区域.

【3580】 若参数 p 和 q 受方程 $p^2+q^2=1$ 限制，求平面族的包络面 $z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$.

解 引进辅助函数

$$\begin{aligned}&F(x,y,z,p,q)\\&=z-z_0-p(x-x_0)-q(y-y_0)+\lambda(p^2+q^2),\end{aligned}$$

则包络面方程由方程组

$$\begin{cases}z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0), & ①\\ p^2+q^2=1, & ②\\ F'_p=-(x-x_0)+2\lambda p=0, & ③\\ F'_q=-(y-y_0)+2\lambda q=0. & ④\end{cases}$$

确定. ③ $\times p+$ ④ $\times q$ 有

$$2\lambda=z-z_0.$$

于是，由 ③，④ 有

$$p=\frac{x-x_0}{z-z_0},q=\frac{y-y_0}{z-z_0}, \qquad ⑤$$

把 ⑤ 式代入 ① 式得

$$(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

由于原平面族无奇点，且易见上述曲面不是平面，故上述曲面即为包络面.

§6. 泰勒公式

1. 泰勒公式

若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某个邻域内具有 $n+1$（包括 $n+1$ 阶）阶的一切连续偏导数，则在这个邻域内下式成立：

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i}f(a,b)+R_n(x,y). \qquad ①$$

其中：

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}\times f[(a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b)]\quad(0<\theta_n<1).$$

2. 泰勒级数

若函数 $f(x,y)$ 可无限次微分且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$，则这个函数可写成幂级数形式：

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{i!j!}f_{x^iy^j}^{(i+j)}(a,b)(x-a)^i(y-b)^i. \qquad ②$$

当 $a=b=0$ 时，式①和②分别称为马克劳林公式和马克劳林级数.

对大于两个以上变量的函数来说，类似的公式成立.

3. 平面曲线的奇点

在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微分两次的曲线 $F(x,y)=0$ 若满足

$F(x_0,y_0)=0, F'_x(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)=0,$

及 $A=F''_{xx}(x_0,y_0), B=F''_{xy}(x_0,y_0), C=F''_{yy}(x_0,y_0)$ 不全为零. 这时，若：

1. $AC-B^2>0$，则 M_0 为孤立奇点；

2. $AC-B^2<0$,则 M_0 为二重点(节);

3. $AC-B^2=0$,则 M_0 为上升点或孤立点.

在 $A=B=C=0$ 的情况下,可能有更复杂的奇点形式,在不属于光滑的 $C^{(2)}$ 类曲线中,奇点可能有更复杂的性质:中断点,角点等等.

【3581】 在点 $A(1,-2)$ 的邻域内按照泰勒公式展开函数

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

所有三阶偏导函数皆为零. 因此 ,$R_2(x,y)=0$. 在点 $A(1,-2)$ 处,

$$f(1,-2)=5,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}}=4,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}}=-1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}}=-2.$$

于是 $$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

【3582】 在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内,按照泰勒公式展开函数

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz,\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz,$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6,\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3.$$

其余的三阶混合偏导数皆为零,所有的四阶偏导数皆为零. 因此,

$R_3(x,y,z)=0$，在点 $A(1,1,1)$ 处

$$f(1,1,1)=0,\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\cdots=\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}=0.$$

于是

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)\\&=f(1,1,1)+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\Big[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}\\&\quad+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}+(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\Big]^i f(1,1,1)\\&=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\\&\quad-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)\\&\quad-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3\\&\quad+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).\end{aligned}$$

【3583】 当 $x=1,y=-1$ 变到 $x_1=1+h,y_1=-1+k$ 时，求出所得函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量.

解 记

$$A(1,-1),P(1+h,-1+k),$$

则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A=\left.(2xy+y^2-2y)\right|_A=1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A=\left.(x^2+2xy-2x)\right|_A=-3,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_A=\left.2y\right|_A=-2,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_A=\left.2x\right|_A=2,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_A = \left.(2x+2y-2)\right|_A = -2,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_A = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_A = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right|_A = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_A = 2,$$

所有四阶偏导函数皆为零. 因此, $R_3(x,y)=0$, 于是由泰勒公式

$$\Delta f = f(P) - f(A) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(A)$$

$$= (h-3k) + (-h^2-2hk+k^2) + hk(h+k).$$

【3584】 若 $f(x,y,z) = Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz$,

试按照数值 h,k 和 l 的正整数幂展开函数 $f(x+y,y+k,z+l)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(Ax+Dy+Ez)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2D,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(By+Dx+Fz), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 2F,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(Cz+Ex+Fy), \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = 2E.$$

所有三阶偏导函数皆为零. 故 $R_2(x,y)=0$, 于是由泰勒公式

有 $f(x+h,y+k,z+l)$

$$= f(x,y,z) + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^i f(x,y,z)$$

$$= f(x,y,z) + 2[h(Ax+Dy+Ez)+k(By+Dx+Fz)$$
$$+ l(Cz+Ex+Fy)]$$
$$+ [Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl]$$

$$= f(x,y,z) + 2[h(Ax+Dy+Ez)$$
$$+ k(Dx+By+Fz)$$
$$+ l(Ex+Fy+Cz)] + f(h,k,l).$$

【3585】 写出函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $A(1,1)$ 邻域内直到二阶项(包括二阶项)的展开式.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=x^y\ln^3 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x.$$

由泰勒公式在点(1,1)附近展开到二次项有

$$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$
$$+R_2[1+\theta(x-1),1+\theta(y-1)],0<\theta<1.$$

其中余项

$$R_2(x,y)=\frac{1}{3!}\{y(y-1)(y-2)x^{y-3}\mathrm{d}x^3$$
$$+3[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y$$
$$+3[yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2+x^y\ln^3 x\mathrm{d}y^3\}$$
$$=\frac{1}{6}x^y\Big[\left(\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y\right)^3$$
$$+3\left(\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{2}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$
$$+\left(\frac{2y}{x^3}\mathrm{d}x^3-\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y\right)\Big]$$

$dx = x - 1, dy = y - 1.$

【3586】 按照马克劳林公式展开函数到四阶项(包括四阶项)：$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

解 $$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3,$$

于是 $$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = [1 + (-x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

【3587】 若 $|x|$ 和 $|y|$ 与 1 比较是很小的量，对以下表达式推导出精确到二阶项的近似公式：

(1) $\frac{\cos x}{\cos y}$；(2) $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}$.

解 (1) $$\frac{\cos x}{\cos y} = \cos x \cdot (1 - \sin^2 y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 y + \cdots\right)$$

$$\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 y\right)$$

$$\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

(2) $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}$

$$= \arctan\frac{1+\frac{x}{1+y}}{1-\frac{x}{x+y}} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x}{1+y}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{x}{1+y}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3 + \cdots$$

$$\approx \frac{\pi}{4} + x(1 - y + y^2) \approx \frac{\pi}{4} + x - xy.$$

【3588】 假定 x,y,z 的绝对值很小,简化下式:

$\cos(x+y+z) - \cos x\cos y\cos z.$

解 $\cos(x+y+z) - \cos x\cos y\cos z$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}z^2\right)$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz - zx)$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2\right)$$

$$= - xy - yz - zx.$$

【3589】 按照 h 的乘幂并精确到 h^4,展开函数:

$$F(x,y) = \frac{1}{4}[f(x+h,y) + f(x,y+h)$$
$$+ f(x-h,y) + f(x,y-h)] - f(x,y).$$

解 $F(x,y)$

$$= \frac{1}{4}\{[f(x+h,y) - f(x,y)] + [f(x,y+h) - f(x,y)]$$
$$+ [f(x-h,y) - f(x,y)] + [f(x,y-h) - f(x,y)]\}$$

$$\approx \frac{1}{4}\left\{\left[h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]\right.$$

$$+ \left[h\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]$$

$$+ \left[-h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]$$

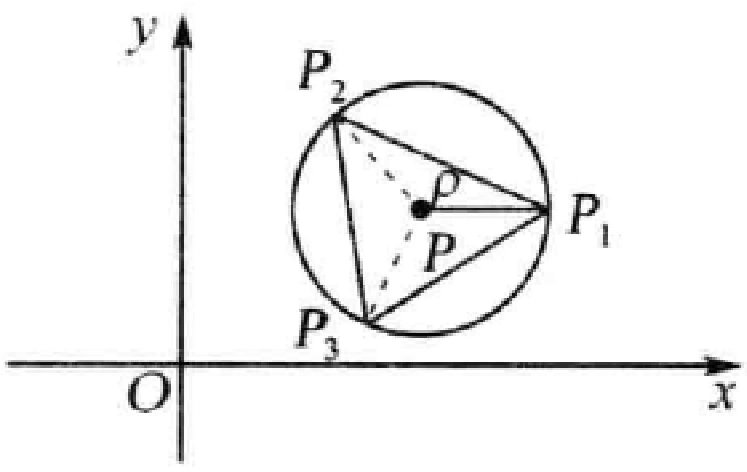
$$\left.+ \left[-h\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^2 f}{\partial y^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]\right\}$$

$$= \frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \frac{h^4}{48}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right).$$

【3590】 设 $f(P) = f(x,y)$，$P_i(x_i,y_i)(i = 1,2,3\cdots)$ 为内接于中心在点 $P(x,y)$ 半径为 ρ 的圆周内的正三角形顶点，而且 $x_1 = x+\rho$，$y_1 = y$，按照 ρ 的正整数幂并精确到 ρ^2 展开函数：

$$F(\rho) = \frac{1}{3}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)].$$

解



3590 题图

如 3590 题图所示，$\triangle P_1P_2P_3$ 的三顶点分别为 $P_1(x+\rho,y)$，$P_2\left(x-\frac{\rho}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$，$P_3\left(x-\frac{\rho}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$，于是

$$F(\rho) = \frac{1}{3}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)]$$

$$\approx \frac{1}{3}\left\{\left[f(P) + \rho\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\right.$$

$$+\left[f(P) - \frac{\rho}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]$$

$$+\left[f(P) - \frac{\rho}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}$$

$$= f(P) + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

【3591】 按照 h 和 k 的乘幂展开函数：

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)$$
$$-f(x,y+k)+f(x,y).$$

解 $\triangle_{xy}f(x,y)$

$$=\Big[f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{n^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\Big]$$

$$-\Big[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\Big]$$

$$-\Big[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\Big]+f(x,y)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$$

$$=hk\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\Big].$$

【3592】 按照 ρ 的乘幂展开函数：

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

解 $F(\rho)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big[f(x,y)$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}{m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\Big]\mathrm{d}\varphi$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\cdot$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

又 $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi-\varphi)\sin^{n-m}(\pi-\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi+\varphi)\sin^{n-m}(\pi+\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(2\pi-\varphi)\sin^{n-m}(2\pi-\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^m+(-1)^n+(-1)^{n-m}]\cdot$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

当 m,n 中至少有一个为奇数时,上述积分为零,当 m,n 皆为偶数时,由 2290 题结论有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n+1}m!n!(n-m)!}=\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}.$$

代入原式,且 m,n 只能为偶数,适当改变指标的编号有

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^{2n}}{(2m)!(2n-2m)!}\cdot$$

$$\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}\cdot\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}$$

$$=f(x,y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x,y).$$

把下列函数展开成马克劳林级数(3593 ~ 3600).

【3593】 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

解 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$

$$=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right]$$

$$\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$$

$$= 1 + (mx + ny) + \frac{1}{2!}(m(m-1)x^2$$

$$+ 2mnxy + n(n-1)y^2 + \cdots),$$

其中 $\quad |x| < 1, |y| < 1.$

【3594】 $f(x,y) = \ln(1 + x + y).$

解 $f(x,y) = \ln(1 + (x + y)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x + y)^k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m} \qquad ①$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n. \qquad ②$$

当 $m = 0, n = 0$ 时，规定 $(-1)! = 0$，① 式成立，只要求 $|x + y| < 1$ 即可，但从 ① 式到 ② 式，必需要求 ① 式绝对收敛，这样才能各项重新排列，易知 ① 式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1 - |x| + |y|]$ 的展开式，它的收敛性要求 $|x| + |y| < 1$，也就是 $f(x,y)$ 的展开式的收敛区域.

【3595】 $f(x,y) = e^x \sin y.$

解 $f(x,y) = \Big(\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!},$$

$$|x| < +\infty, \ |y| < +\infty.$$

【3596】 $f(x,y) = e^x \cos y.$

解 $f(x,y) = \Big(\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}\Big)$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!},$$

$$|x| < +\infty, \ |y| < +\infty.$$

【3597】 $f(x,y)=\sin x\operatorname{sh}y$.

解 $\operatorname{sh}y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{y^n}{n!}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |y|<+\infty.$$

于是 $f(x,y)=\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!},$$

$$|x|<+\infty,\ |y|<+\infty.$$

【3598】 $f(x,y)=\cos x\operatorname{ch}y$.

解 $\operatorname{ch}y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{2n}}{(2n)!},\ |y|<+\infty.$

于是 $f(x,y)=\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{2n}}{(2n)!}\right)$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!},$$

$$|x|<+\infty,\ |y|<+\infty.$$

【3599】 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

解 $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{2n+1}(-1)^n\frac{x^{2k}y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n+m}{2}\pi\right)\frac{x^{2n}y^{2m}}{m!n!},\quad x^2+y^2<+\infty.$$

【3600】 $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

解 $f(x,y)=\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\dfrac{x^m}{m}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{y^n}{n}\right)$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^my^n}{mn},\ |x|<1,\ |y|<1.$$

【3601】 写出函数

$$f(x,y)=\int_0^t (1+x)^{t^2 y}\mathrm{d}t,$$

马克劳林级数展开式的前三项.

解 $(1+x)^{t^2 y}$

$$=\mathrm{e}^{t^2 y\ln(1+x)}\approx 1+t^2 y\ln(1+x)+\frac{1}{2!}(t^2 y\ln(1+x))^2$$

$$\approx 1+t^2 y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=1+t^2 xy-\frac{t^2}{2}x^2 y.$$

于是

$$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2 xy-\frac{t^2}{2}x^2 y\right)\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

【3602】 按照二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数幂把函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

解 $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^{(x-1)+(y+1)}=\mathrm{e}^{x-1}\cdot\mathrm{e}^{y+1}$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!},$$

$$|x|<+\infty,\ |y|<+\infty.$$

【3603】 写出函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ 在点 $M(1,1)$ 邻域内的泰勒级数展开式.

解 令

$$x=1+h,y=1+k,$$

于是 $$\frac{x}{y}=\frac{1+h}{1+k}=(1+h)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n k^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n,$$

$$|x|<+\infty,0<y<2.$$

【3604】 设 z 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 定义的 x 和 y 的隐函数,在 $x=1$ 和 $y=1$ 时取 $z=1$.

按照二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂写出函数 z 的展开式的前

几项.

解 对原方程求微分有

$$3z^2\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0, \qquad ①$$

对①式求微分有

$$(3z^2-2x)\mathrm{d}^2z+6z\mathrm{d}z^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0. \qquad ②$$

以 $x=1,y=1,z=1$ 代入①,②两式有

$$\mathrm{d}z=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z&=(4\mathrm{d}x-6\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\\&=(4\mathrm{d}x-12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}y)\cdot(2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)\\&=-16\mathrm{d}x^2+20\mathrm{d}x\mathrm{d}y-6\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

于是,在 $x=1,y=1$ 处

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6,\cdots.$$

从而有 $$z=1+2(x-1)-(y-1)-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots.$$

研究以下曲线的奇点类型,并大致作出这些曲线(3605～3611).

【3605】 $y^2=ax^2+x^3$.

解 由

$$\begin{cases}F(x,y)=ax^2+x^3-y^2=0,\\F'_x(x,y)=2ax+3x^2=0,\\F'_y(x,y)=-2y=0.\end{cases}$$

有 $x=0,y=0$,故点(0,0)为奇点.又由

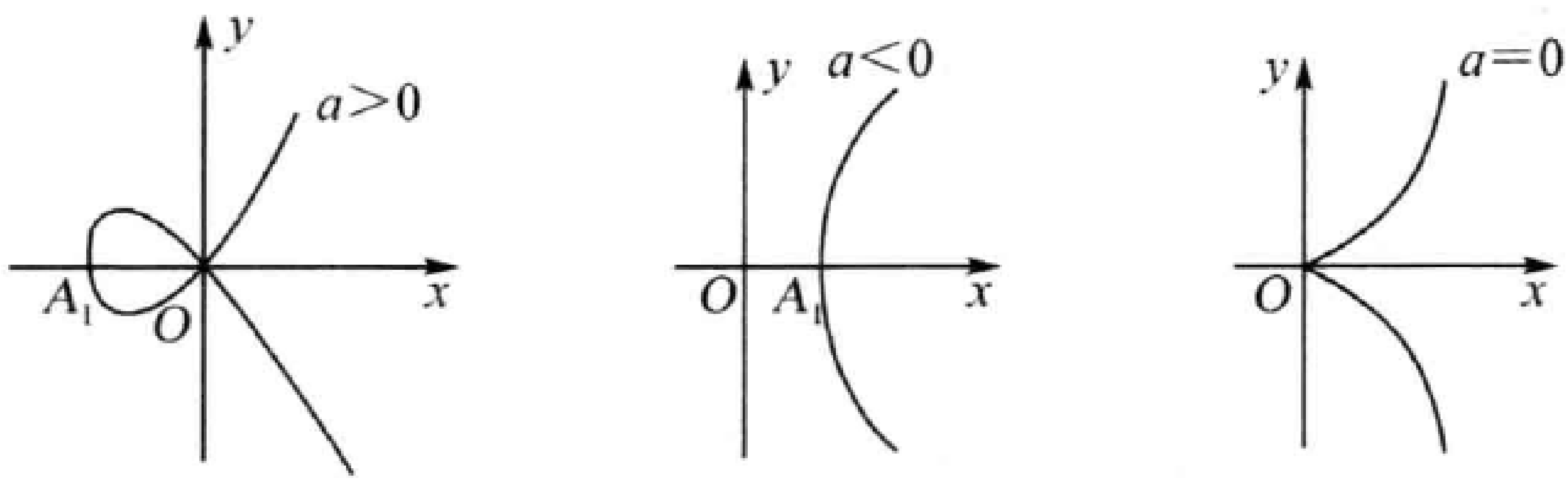
$$A=F''_{xx}(0,0)=2a,B=F''_{xy}(0,0)=0.$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=-2,AC-B^2=-4a.$$

于是当 $a>0$ 时,点(0,0)为二重点,当 $a<0$ 时,点(0,0)为孤立

点，当 $a=0$ 时，原方程为 $y^2=x^3$，由 3574(2) 知点(0,0) 为尖点.

如 3605 题图所示，点 A_1 为$(-a,0)$.



3605 题图

【3606】 $x^3+y^3-3xy=0$.

解　由

$$\begin{cases}F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0,\\F'_x(x,y)=3x^2-3y=0,\\F'_y(x,y)=3y^2-3x=0.\end{cases}$$

有 $x=0,y=0$，于是点(0,0) 为奇点，又

$$A=F''_{xx}(0,0)=0,B=F''_{xy}(0,0)=-3,$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=0,$$

且　　$AC-B^2=-9<0$,

故点(0,0) 为二重点，图如 370 题(2) 所示.

【3607】 $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解　由

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^2-x^4-y^4=0,\\F'_x(x,y)=2x-4x^3=0,\\F'_y(x,y)=2y-4y^3=0.\end{cases}$$

有 $x=0,y=0$，于是点(0,0) 为奇点，又

$$A=F''_{xx}(0,0)=2,B=F''_{xy}(0,0)=0,$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=2,$$

且　　$AC-B^2=4>0$.

故点(0,0)为孤立点，图如1542题所示.

【3608】 $x^2+y^4=x^6$.

解 由

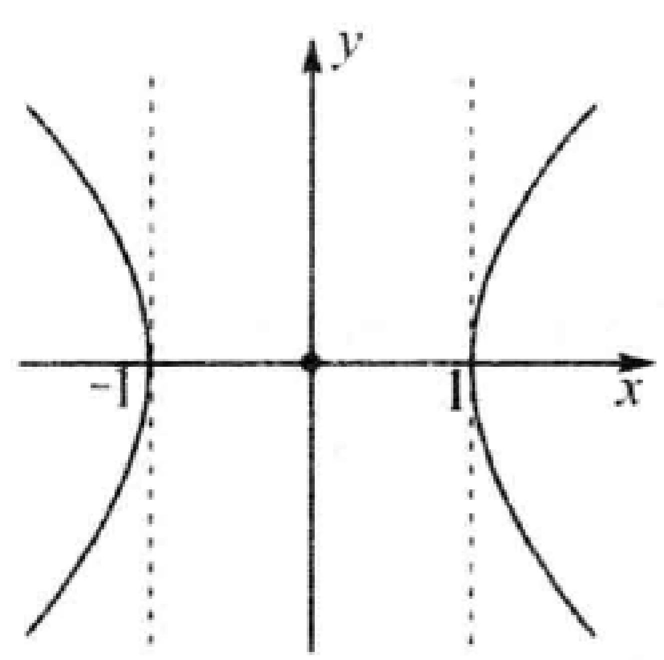
$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^4-x^6=0,\\F'_x(x,y)=2x-6x^5=0,\\F'_y(x,y)=4y^3=0.\end{cases}$$

有 $x=0,y=0$，于是点(0,0)为奇点，又

$$A=F''_{xx}(0,0)=2,B=F''_{xy}(0,0)=0,$$
$$C=F''_{yy}(0,0)=0,$$

且 $$AC-B^2=0.$$

于是点(0,0)为上升点或孤立点，该题中，点(0,0)为孤立点.事实上，把原方程改写为 $y^4=x^6-x^2$，对(0,0)点的很小的邻域内的点($|x|<1$，$|y|<1$)，左端 $y^4\geqslant 0$，右端 $x^6-x^2=x^2(x^4-1)\leqslant 0$，除点(0,0)外没有适合方程的点，于是点(0,0)为孤立点，如3608题图所示.



3608 题图

【3609】 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解 由

$$\begin{cases}F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,\\F'_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-2a^2x=0,\\F'_y(x,y)=4y(x^2+y^2)+2a^2y=0.\end{cases}$$

有 $x=0,y=0$，于是点$(0,0)$ 为奇点，又

$$A=F''_{xx}(0,0)=-2a^2,B=F''_{xy}(0,0)=0,$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=2a^2,$$

且 $$AC-B^2=-4a^4<0,(a\neq 0).$$

故点$(0,0)$ 为二重点，图象如 3367 题所示.

【3610】 $(y-x^2)^2=x^5$.

解 由

$$\begin{cases}F(x,y)=(y-x^2)^2-x^5=0,\\ F'_x(x,y)=-4x(y-x^2)-5x^4=0,\\ F'_y(x,y)=2(y-x^2)=0.\end{cases}$$

有 $x=0,y=0$，于是点$(0,0)$ 为奇点，又

$$A=F''_{xx}(0,0)=0,B=F''_{xy}(0,0)=0,$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=2,$$

且 $$AC-B^2=0.$$

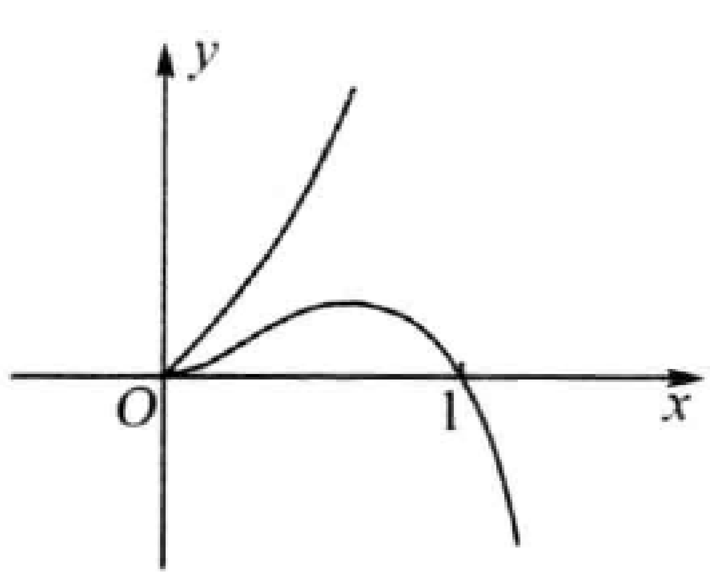
于是对点$(0,0)$ 还需讨论一下，由原方程有

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}},$$

右边只允许 $x\geqslant 0$，当 $0<x<1$ 时，皆有 $y>0$，且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

于是点$(0,0)$ 为尖点，如 3610 题图所示.



3610 题图

【3611】 $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

解 由

$$\begin{cases} F(x,y)=(a+x)y^2-(a-x)x^2=0, & ① \\ F'_x(x,y)=y^2-2ax+3ax^2=0, & ② \\ F'_y(x,y)=2(a+x)y=0. & ③ \end{cases}$$

于是据 ③ 式有 $x=-a$ 或 $y=0$,把 $y=0$ 代入 ①,② 有 $x=0$,把 $x=-a$ 代入 ① 式,有$(a-x)x^2=0$,若 $a\neq 0$,则得出矛盾的结果,若 $a=0$,则有 $x=0,y=0$,于是点$(0,0)$ 为奇点. 又因

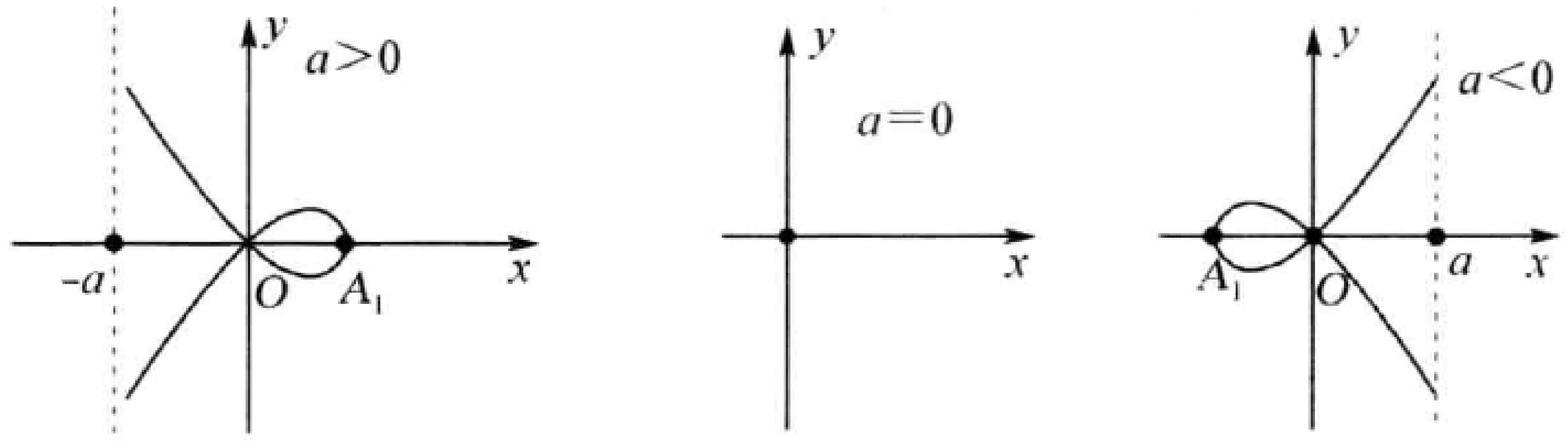
$$A=F''_{xx}(0,0)=-2a,$$

$$B=F''_{xy}(0,0)=0,$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=2a,$$

且 $$AC-B^2=-4a^2.$$

于是,当 $a\neq 0$ 时,点$(0,0)$ 为二重点,当 $a=0$ 时,方程为 $xy^2=-x^3$,从而曲线为 $x=0$,点$(0,0)$ 为上升点. 如 3611 题图所示,图中点 A_1 为$(a,0)$.



3611 题图

【3612】 研究参数 a,b,c 的数值$(a\leqslant b\leqslant c)$ 与曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状间的关系.

解 由

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0, & ① \\ F'_x(x,y)=-(x-a)(x-b)-(x-a)(x-c)-(x-b)(x-c)=0, & ② \\ F'_y(x,y)=2y=0. & ③ \end{cases}$$

于是由 ③ 有 $y=0$,代入 ①,联立 ①,② 求解.

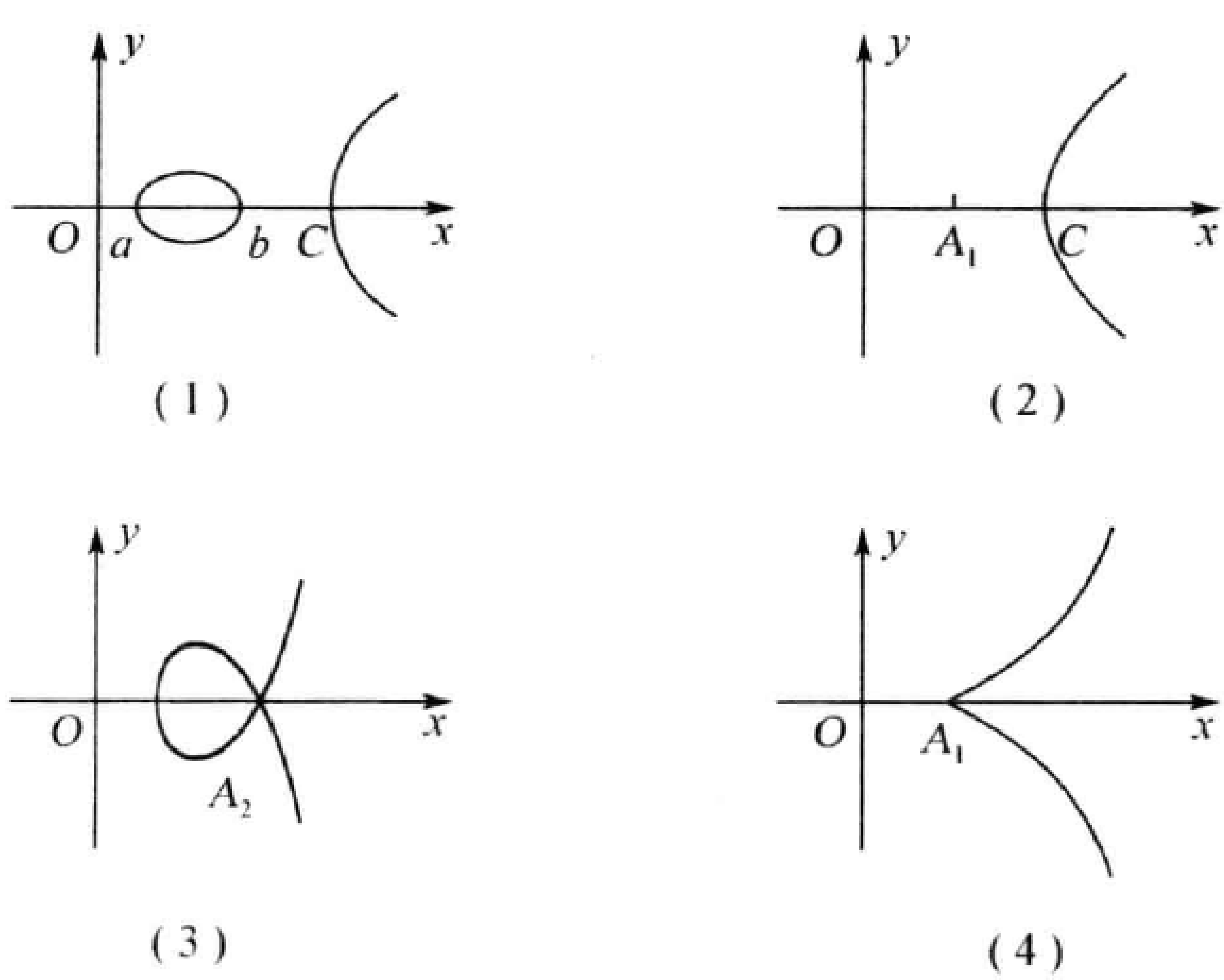
当 $a<b<c$ 时,①,② 无解. 因此无奇点,此时曲线如 3612 题图(1) 所示

当 $a=b<c$ 时,显然 ①,② 有解 $x=a,y=0$,由于

$$A=F''_{xx}(a,0)=-2(a-c),$$
$$B=F''_{xy}(a,0)=0,$$
$$C=F''_{yy}(a,0)=2.$$

且 $$AC-B^2=-4(a-c)>0,$$

于是点 $A_1(a,0)$ 为孤立点,如 3612 题图(2) 所示.



3612 题图

当 $a<b=c$ 时,由 ①,② 有 $x=b,y=0$,又由

$$A=F''_{xx}(b,0)=-2(c-a),$$
$$B=F''_{xy}(b,0)=0,$$
$$C=F''_{yy}(b,0)=2,$$

且 $$AC-B^2=-4(c-a)<0.$$

故点 $A_2(b,0)$ 为二重点,如 3612 题图(3) 所示.

当 $a=b=c$ 时,有解 $x=a,y=0$,由于 $AC-B^2=0$,此时

原方程为 $y^2=(x-a)^3$,由 3574 题(2) 知,点 $A(a,0)$ 为尖点,如 3612 题图(4) 所示.

研究超越曲线的奇点(3613 ~ 3620).

【3613】 $y^2=1-\mathrm{e}^{-x^2}$.

解 由

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+\mathrm{e}^{-x^2}=0,\\F'_x(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}=0,\\F'_y(x,y)=2y=0.\end{cases}$$

有 $\quad x=0,\quad y=0.$

于是点(0,0) 为奇点,又

$$A=F''_{xx}(0,0)=-2,B=F''_{xy}(0,0)=0,$$
$$C=F''_{yy}(0,0)=2,$$

且 $\quad AC-B^2=-4<0.$

故点(0,0) 为二重点.

【3614】 $y^2=1-\mathrm{e}^{-x^3}$.

解 由

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+\mathrm{e}^{-x^3}=0,\\F'(x,y)=-3x^2\mathrm{e}^{-x^3}=0,\\F'_y(x,y)=2y=0.\end{cases}$$

有 $\quad x=0,y=0.$

故点(0,0) 为奇点,又

$$A=F''_{xx}(0,0)=0,$$
$$B=F''_{xy}(0,0)=0,$$
$$C=F''_{yy}(0,0)=2.$$

且 $\quad AC-B^2=0.$

于是对点(0,0) 还需再讨论,而原式可解为

$$x=-\sqrt[3]{\ln(1-y^2)}>0,$$

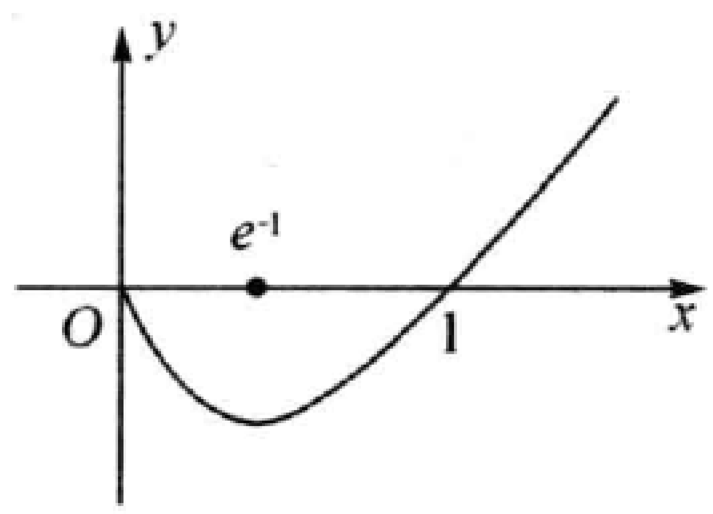
在(0,0) 附近,第一及第四象限各有原曲线的一支,因此,点(0,0) 为尖点.

【3615】 $y = x\ln x$.

解 令

$$F(x,y) = x\ln x - y, F'_x(x,y) = 1 + \ln x,$$
$$F'_y(x,y) = -1 \neq 0.$$

故无奇点,如 3615 题图所示.



3615 题图

【3616】 $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解 在 $x=0$ 处,由

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to-0} y = 0,$$

有 $x=0$ 为可去的第一类间断点,补充定义 $y|_{x=0} = 0$ 后,函数

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

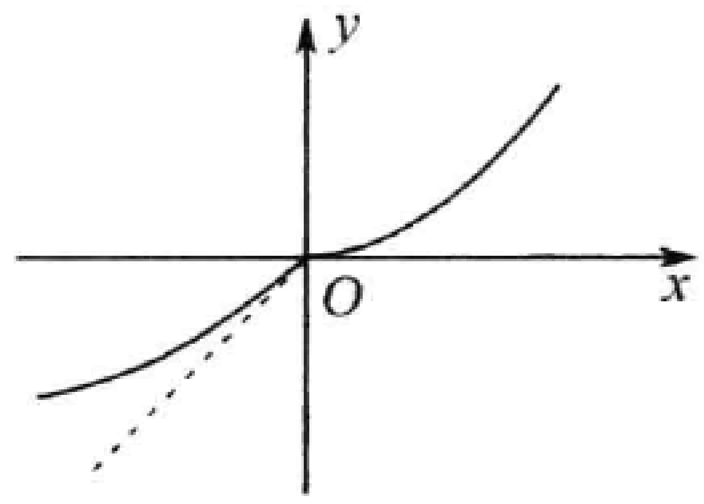
在 $x=0$ 处连续,由 $F'_y(x,y) = 1 \neq 0$,于是无奇点,当 $x \neq 0$ 时,

由 $$y' = \frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$$

$$\lim_{x\to+0} y' = \lim_{z\to+\infty} \frac{(1+z)e^z+1}{(1+e^z)^2} = \lim_{z\to+\infty} \frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}$$
$$= \lim_{z\to+\infty} \frac{z+2}{2(1+e^z)} = 0,$$

$$\lim_{x\to-0} y' = \lim_{z\to+\infty} \frac{(1-z)e^{-z}+1}{(1+e^{-z})^2} = 1.$$

于是点(0,0)为角点,如3616题图所示.



3616 题图

【3617】 $y=\arctan\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解 $x=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$

为不连续点,由于

$$\lim_{x\to k\pi+0}y=(-1)^k\frac{\pi}{2},\lim_{x\to k\pi-0}y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}.$$

于是点 $x=k\pi$ 为函数的第一类不连续点.

【3618】 $y^2=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

解 由 $y=\pm\sqrt{\sin\dfrac{\pi}{x}}$,

知在 $\left(\dfrac{1}{2k},\dfrac{1}{2k-1}\right),k=\pm1,\pm2,\cdots,$

内无定义.在边界点

$$x=\frac{1}{2k}\text{ 及 }x=\frac{1}{2k-1},y=0.$$

函数图象有上下两支.设

$$F(x,y)=y^2-\sin\frac{\pi}{x},$$

则在边界点,由于 $F'_x\neq0,F'_y\neq0$,于是也无奇点.

在(0,0)点的任何邻域内,有无穷多个曲线的封闭分支,这些分支没有一个过(0,0)点,它不属于任何一种类型.

【3619】 $y^2=\sin x^2$.

解 由$\begin{cases} F(x,y) = y^2 - \sin x^2 = 0, \\ F'_x(x,y) = -2x\cos x^2 = 0, \\ F'_y(x,y) = 2y = 0. \end{cases}$

有 $x = 0, y = 0.$

于是点(0,0) 为奇点，又

$$A = F''_{xx}(0,0) = -2, B = F''_{xy}(0,0) = 0,$$
$$C = F''_{yy}(0,0) = 2,$$

且 $AC - B^2 = -4 < 0.$

故点(0,0) 为二重点.

【3620】 $y^2 = \sin^3 x.$

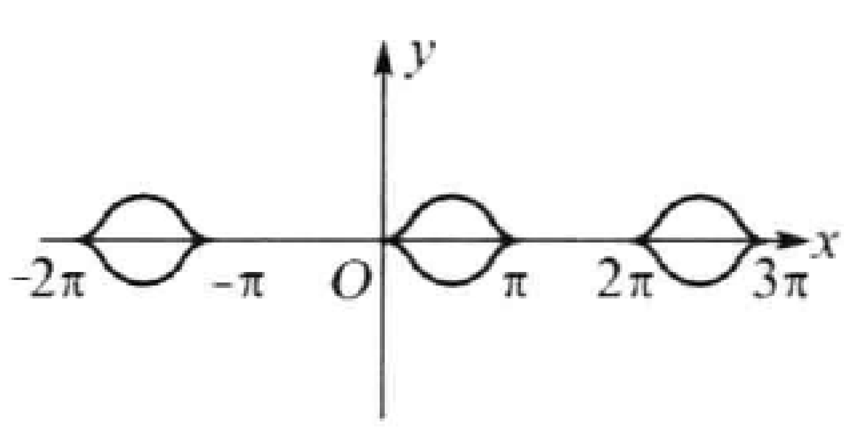
解 易知函数 y 的周期为 2π，在$(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 内函数有定义，而在$((2k-1)\pi,2k\pi)(k = 0,\pm,\cdots)$ 内无定义. 由

$$\begin{cases} F(x,y) = y^2 - \sin x^3 = 0, \\ F'_x(x,y) = -3\sin^2 x\cos x = 0, \\ F'_y(x,y) = 2y = 0. \end{cases}$$

有 $x = 0, y = 0$，于是点(0,0) 为奇点.

在点(0,0) 的左侧(指充分小的范围，以下相同) 无曲线的点，而在右侧的第一、第四象限分别有曲线的两支，因此，点(0,0) 为尖点，如 3620 题图所示.

由周期性知，点$(k\pi,0)(k = \pm 1, \pm 2,\cdots)$ 也为尖点，只是当 k 是偶数时，右侧才有曲线的两枝，当 k 为奇数时，左侧才有曲线的两枝.



3620 题图

§7. 多变量函数的极值

1. 极值的定义

设函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 的邻域内有定义,如果当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时,$f(P_0)>f(P)$,或者 $f(P_0)<f(P)$,则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 处有极值(相应地为极大值或极小值).

2. 极值的必要条件

可微函数 $f(P)$ 只在稳定点 P_0,即在 $d\,f(P_0)=0$ 处可能达到极值,所以,函数 $f(P)$ 的极值点满足方程组

$$f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0 \qquad (i=1,\cdots,n).$$

3. 极值的充分条件

当 $\sum\limits_{t=1}^{n}|\mathrm{d}x_t|\neq 0$ 时,函数 $f(P)$ 在点 P_0 处具有:

(1) 极大值,若

$$\mathrm{d}f(P_0)=0,\mathrm{d}^2f(P_0)<0.$$

(2) 极小值,若

$$\mathrm{d}f(P_0)=0,\mathrm{d}^2f(P_0)>0.$$

研究二次微分 $\mathrm{d}^2f(P_0)$ 的符号可以用相应的二次形简化成典式的方法来进行.

特别是对于有两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$ 在稳定点 $(x_0,y_0)(\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0)$,在 $D=AC-B^2\neq 0$ 条件下[这里 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$,$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$,$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$]具有:

① 极小值,若 $D>0$, $A>0(C>0)$;

② 极大值,若 $D>0$, $A<0(C<0)$;

③ 没有极值,若 $D<0$.

4. 条件极值

当存在关系式 $\varphi_i(P)=0(i=1\cdots\cdots,m;m<n)$ 时,求函数 $f(P_0)=f(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 的极值问题可简化为求解拉格朗日函数的普通极值:

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P).$$

其中 $\lambda_t(t=1,\cdots,m)$ 为常数因子.

在最简单的情况下,可根据研究函数 $L(P)$ 在稳定点 P_0 上的二次微分符号 $d^2L(P_0)$,并且在变量 $dx_1,\cdots\cdots dx_n$ 受以下关系式限制的条件下:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0\qquad(i=1,\cdots,m).$$

来解决条件极值的存在和性质问题.

5. **绝对极值**

在有界闭域内可微分的函数 $f(P)$ 在这个域内或在稳定点上或在域的边界点上达到自己的最大值和最小值.

研究以下多变量函数的极值(3621 ～ 3649).

【3621】 $z=x^2+(y-1)^2$.

解 由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2(y-1)=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0(0,1)$,显然 $z(0,1)=0$,当 $(x,y)\neq(0,1)$ 时,$z>0$,于是函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0)=0$..

【3622】 $z=x^2-(y-1)^2$.

解 由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2(y-1)=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0(0,1)$,由

$$A=z''_{xx}(0,1)=2,B=z''_{xy}(0,1)=0,$$
$$C=z''_{yy}(0,1)=-2,$$

又 $\qquad AC-B^2=-4<0.$

于是极值不存在.

【3623】 $z=(x-y+1)^2$.

解 由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x-y+1)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2(x-y+1)=0,\end{cases}$

有驻点分布在直线 $x-y+1=0$ 上,在此直线上的点皆有 $z=0$,但 $z\geqslant 0$ 恒成立. 因此函数 z 在直线 $x-y+1=0$ 上各点取极小值 $z=0$.

【3624】 $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.

解 由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+1=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0(1,0)$,又

$$A=z''_{xx}(1,0)=2, B=z''_{xy}(1,0)=-1,$$
$$C=z''_{yy}(1,0)=2,$$

且 $$AC-B^2=3>0.$$

于是函数 z 在点 P_0 的得极小值

$$z(P_0)=-1.$$

【3625】 $z=x^2y^3(6-x-y)$.

解 由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y)=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0(2,3)$,且直线 $x=0$,直线 $y=0$ 上的点皆为驻点.

易知在 P_0 点,$A=-162, B=-108, C=-144, AC-B^2>0$,于是函数在点 P_0 取得极大值 $z(P_0)=108$.

在直线 $x=0$ 和 $y=0$ 上的各点皆有 $z=0$.

$1°$ $y=0$ 的情形

在直线上 $x\neq 0$ 及 $x\neq 6$ 处,$x^2(6-x-y)\neq 0$,在确定点的足够小的邻域内也不变号,但 y^3 可正可负,因此函数 z 变号,即在上述情况下没有极值,当 $x=0$ 和 $x=6$ 类似地可判断也无极值.

2° $x=0$ 的情形

在直线上 $y=0$ 及 $y=6$ 的情况与 1° 相同，无极值，但当 $0<y<6$ 时，$y^3(6-x-y)>0$，且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号，因此，在足够小的邻域内，$z=x^3y^3(6-x-y)\geqslant 0$ 也成立，但邻域内任意近处总有 $z=0$ 的点，于是，对于 $x=0,0<y<6$ 的点函数 z 取得极小值 $z=0$，同理，对于直线 $x=0$ 上，$y<0$ 及 $y>6$ 的各点处，函数 z 取得极大值 $z=0$.

【3626】 $z=x^3+y^3-3xy$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x}=3y^2-3x=0.\end{cases}$$

有驻点 $P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$.

易知在点 P_0 处有 $A=0,B=-3,C=0$ 及 $AC-B^2=-9<0$，于是无极值，而在点 P_1 处有 $A=6,B=-3,C=6$ 及 $AC-B^2=27>0$，于是函数在该点取到极小值 $z(P_1)=-1$.

【3627】 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0.\end{cases}$$

有驻点 $P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$，$P_2(-1,1)$，在点 P_0 点附近，当 $x=y$ 且足够小时，有 $z=2x^4-4x^2<0$，当 $x=-y$ 时，$z=2x^4>0$. 因此在 P_0 点无极值，易知，在点 P_1 和 P_2 处，皆有 $A=10,B=-2,C=10$，及 $AC-B^2=96>0$，于是函数 z 在点 P_1 和 P_2 处的极小值 $z=-2$.

【3627.1】 $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

解 由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 12x^3 - 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

有驻点$(0,0)$，$(0,1)$，$(0,-1)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},1\right)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-1\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},1\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-1\right)$，又

$$A = z''_{xx} = 60x^4 - 2, B = z''_{xy} = 0,$$
$$C = z''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

故
$$A\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2,\ C\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -4.$$

有
$$(AC - B^2)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 8 > 0.$$

于是在$(0,0)$处有极大值$z(0,0) = 0$. 又

$$A\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -2,\qquad C\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 8,$$

于是有
$$(AC - B^2)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -16 < 0.$$

故在$(0,1)$处无极值. 又

$$A\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}} = -2,\ C\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}} = 8,$$

故
$$(AC - B^2)\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}} = -16 < 0.$$

从而在$(0,-1)$处无极值. 又

$$A\Big|_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\y=0}} = -\frac{1}{3},\ C\Big|_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\y=0}} = -4,$$

有
$$(AC - B^2)\Big|_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\y=0}} = \frac{4}{3} > 0.$$

于是在$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$处皆有极大值. 又

$$A\Big|_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\ y=\pm 1}}=-\frac{1}{3},\ C\Big|_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\ y=\pm 1}}=8,$$

于是 $$(AC-B^2)\Big|_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\ y=\pm 1}}=-\frac{8}{3}<0.$$

故在$\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6},\pm 1\right)$处无极值.

【3628】 $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}\qquad(x>0,y>0).$

解 由

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{50}{x^2}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{20}{y^2}=0.\end{cases}$$

有驻点 $P_0(5,2)$，易知在该点有 $A=\frac{4}{5}$，$B=1$，$C=5$，故 $AC-B^2=3>0$，从而函数 z 在该点取得极小值 $z(P_0)=30$.

【3629】 $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\qquad(a>0,b>0).$

解 考察函数

$$u=z^2=x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

显然 z 的极值均为 u 的极值，且 u 在点 (x,y) 取得的极值不为零时，z 也在点 (x,y) 取得极值，u 在点 (x,y) 取得的极值为零时，情况较复杂，由

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{2}{a^2}x^3y^2=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{2^2}{b^2}x^2y^3=0.\end{cases}$$

有驻点 $P_0(0,0)$，$P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，$P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，$P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，

$P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$，由于 z 在点 P_0 附近变号，所以 $z(P_0)$ 不是极值，又

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^2\left(1-\dfrac{6x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right),\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{6y^2}{b^2}\right),\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\left(1-\dfrac{2x^2}{a^2}-\dfrac{2y^2}{b^2}\right).\end{cases}$$

在 P_1,P_2,P_3,P_4 各点有

$$A=-\frac{8}{9}b^2,B=\pm\frac{4}{9}ab,C=-\frac{8}{9}a^2,$$

$$AC-B^2=\left(\frac{64}{81}-\frac{16}{81}\right)a^2b^2>0.$$

故函数 u 取得正的极大值,于是,相应地函数 z 在点 P_1,P_2 取得极值

$$z(P_1)=z(P_2)=\frac{ab}{3\sqrt{3}},$$

而在点 P_3 及 P_4 取得极小值

$$z(P_3)=z(P_4)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}.$$

【3630】 $z=\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\qquad(a^2+b^2+c^2\neq 0).$

解 令 $x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$

则 $$z(x,y)=z(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{ar\cos\varphi+br\sin\varphi+c}{\sqrt{r^2+1}}.$$

从而 $$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{a\cos\varphi+b\sin\varphi-cr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}=0, & ①\\ \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}=\dfrac{-ar\sin\varphi+br\cos\varphi}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0, & ②\end{cases}$$

先设 a,b 不同时为零,由 ② 考虑到 $r=0$ 不是解,于是有

$$a\sin\varphi=b\cos\varphi,$$

于是 $$\cos\varphi=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad ③$$

当 $c=0$ 时无解,事实上由 ① 有

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0,$$

又由 ③ 有 $a = b = 0$，这与 a,b 不同时为零的假设矛盾.

当 $c \neq 0$ 时

$$r = \frac{a\cos\varphi + b\sin\varphi}{c} = \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}.$$

为保证 $r > 0$，在 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 前取与 c 一致的符号，此时，有

$$x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c},$$

又 $$z''_{rr} = -\frac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$z''_{\varphi\varphi} = -\frac{cr^2}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}, z''_{r\varphi} = 0,$$

及 $$z''_{rr}z''_{\varphi\varphi} - (z''_{r\varphi})^2 > 0.$$

于是当 $c > 0$ 时，$z''_{rr} < 0$，函数 z 在点 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ 取得极大值 $z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$，当 $c < 0$ 时，$z''_{rr} > 0$，函数在点 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ 取得极小值 $z = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

下设 $a = b = 0$，由假设 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ 知 $c \neq 0$，此时解方程组 ①,② 得 $r = 0$，φ 任意，即 $x = 0, y = 0$，因为 $z = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$，故当 $c > 0$ 时 z 在点(0,0) 取极大值 $z = c$，当 $c < 0$ 时，z 在点(0,0) 取极小值 $z = c$.

综上所述，若 $c > 0$，则 z 在点 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ 取极大值 $z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$；若 $c < 0$，则 z 在点 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ 取极小值 $z = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$；若 $c = 0$（由假设，$a^2 + b^2 \neq 0$），则 z 无极值.

【3631】 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

点(0,0)为偏导数无意义的点,当$(x,y)\neq(0,0)$时,$z<1$,故$z(0,0)=1$为极大值.

【3632】 $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)=0.\end{cases}$$

得驻点$P_0(0,0)$,$P_1\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+16x-6y+4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2-4x+4y+\frac{2}{3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+6x-y-1).$$

在点P_0处,$A=16$,$B=-6$,$C=6$及$AC-B^2=60>0$,故函数z取得极小值$z(P_0)=0$,在点P_1处,$A=14e^{-2}$,$B=-9e^{-2}$,$c=\dfrac{3}{2}e^{-2}$及$AC-B^2=-60e^{-4}<0$,故无极值.

【3633】 $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{x^2-y}(5x-2x^2+xy-1)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2-y}(2x-y-4)=0.\end{cases}$$

有驻点$P_0(1,-2)$,又

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2-y}(10x^2-4x^3+2x^2y-6x+y+5),\\[2ex]\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x^2-y}(3-2x+y),\\[2ex]\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x^2-y}(2x^2-xy-4x+1).\end{cases}$$

在点 P_0 处，$A=-2e^3$，$B=2e^3$，$C=-e^3$ 及 $AC-B^2=-2e^6<0$，于是无极值.

【3634】 $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=5e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)\cdot(2x+y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=7e^{-(x^2+xy+y^2)}-(5x+7y-25)\cdot(x+2y)e^{-(x^2+xy+y^2)}=0.\end{cases}$$

① × 7 − ② × 5，消去因子 $e^{-(x^2+xy+y^2)}$，有

$$3(5x+7y-25)(3x-y)=0.$$

以 $5x+7y-25=0$ 代入 ①、②，显然矛盾，故必有 $5x+7y-25\neq 0$，从而 $y=3x$，代入 ① 有 $26x^2-25x-1=0$，解之有驻点 $P_0(1,3)$，$P_1\left(-\dfrac{1}{26},-\dfrac{3}{26}\right)$. 在点 P_0 处，

$$\begin{aligned}A&=z''_{xx}(P_0)=\left.[z'_x(x,3)]'_x\right|_{x=1}\\&=\left.\{e^{-(x^2+3x+9)}[5-(5x-4)(2x+3)]\}'_x\right|_{x=1}\\&=\left.[e^{-(x^2+3x+9)}]'\right|_{x=1}\cdot\left.[5-(5x-4)(2x+3)]\right|_{x=1}\\&\quad+\left.[e^{-(x^2+3x+9)}]\right|_{x=1}\cdot\left.[5-(5x-4)\cdot(2x+3)]'\right|_{x=1}\\&=-27e^{-13}.\end{aligned}$$

同理有 $B=z''_{xy}(P_0)=-36e^{-13}$，$C=z''_{yy}(P_0)=-51e^{-13}$.

于是 $AC-B^2=81e^{-26}>0$.

从而函数 z 在点 P_0 取得极大值

$$z(P_0)=e^{-13}\approx 2.26\cdot 10^{-6}.$$

同理函数 z 在点 P_1 取得极小值

$$z(P_1)=-26e^{-\frac{1}{52}}\approx -25.50.$$

【3635】 $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

解 由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \dfrac{4}{x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \dfrac{10}{y} = 0. \end{cases} \quad (x > 0, y > 0).$$

有驻点 $P_0(1,2)$,在点 P_0 处,$A = 6, B = 1, C = \dfrac{9}{2}, AC - B^2 = 26 > 0$,于是函数 z 在点 P_0 取得极小值

$$z(P_0) = 7 - 10\ln 2 \approx 0.0685.$$

【3636】 $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$.

$(0 \leqslant x \leqslant \pi/2; 0 \leqslant y \leqslant \pi/2)$

解 由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \sin(x - y) = 0, & ① \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin(x - y) = 0. & ② \end{cases}$$

① + ②,$\cos x = \sin y$,因为 x, y 均为锐角,于是有

$$y = \frac{\pi}{2} - x,$$

代入 ① 得

$$\cos x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0.$$

但是 $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$,

故 $\cos\dfrac{3x}{2} = 0$.

从而得驻点 $P_0\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$,由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x - y), \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x - y), \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x - y). \end{cases}$$

有在点 P_0 处 $A=-\sqrt{3}, B=\frac{\sqrt{3}}{2}, C=-\sqrt{3}, AC-B^2=\frac{9}{4}>0$，于是函数 z 在点 P_0 取得极大值

$$z(P_0)=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

【3637】 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$.

$$(0\leqslant x\leqslant\pi;0\leqslant y\leqslant\pi)$$

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin y\sin(2x+y)=0, & ①\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x\sin(x+2y)=0. & ②\end{cases}$$

可得下列四个方程组

$$\text{Ⅰ}:\begin{cases}\sin x=0,\\ \sin y=0,\end{cases}\qquad \text{Ⅱ}:\begin{cases}\sin x=0,\\ \sin(2x+y)=0,\end{cases}$$

$$\text{Ⅲ}:\begin{cases}\sin y=0,\\ \sin(x+2y)=0,\end{cases}\qquad \text{Ⅳ}:\begin{cases}\sin(2x+y)=0,\\ \sin(x+2y)=0.\end{cases}$$

又 $0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi$，于是我们得到 ① 和 ② 的六个解 $P_1(0,0), P_2(0,\pi), P_3(\pi,0), P_4(\pi,\pi), P_5\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right), P_6\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$.

因为所考虑的区域是闭正方形 $0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi$，于是点 P_1, P_2, P_3, P_4 都是该区域的边界点，因此 P_1, P_2, P_3, P_4 不是函数 z 达到的极值点，又由于

$$z''_{xx}=2\sin y\cos(2x+y), z''_{xy}=\sin 2(x+y),$$
$$z''_{yy}=2\sin x\cos(x+2y).$$

于是在点 P_5 处有

$$AC-B^2=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})-\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2>0,$$

且 $\qquad A=-\sqrt{3}<0.$

故函数 z 在点 P_5 取得极大值 $z(P_5)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，在点 P_6 有

$$AC-B^2=(\sqrt{3})(\sqrt{3})-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0,$$

且 $A=\sqrt{3}>0$,故函数 z 在点 P_6 取得极小值 $z(P_6)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

【3638】 $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\arctan\frac{y}{x}$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{3y}{x^2+y^2}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-2+\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{3x}{x^2+y^2}=0.\end{cases}$$

有驻点 $P_0(1,1)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-x^2+6xy+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-6xy-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3x^2-2xy+3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

于是在点 P_0 处有 $A=\frac{3}{2}$,$B=-\frac{1}{2}$,$C=-\frac{3}{2}$ 及 $AC-B^2=-\frac{5}{2}<0$,故无极值.

【3639】 $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0, & ①\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}=0. & ②\end{cases}$$

把 ① 式乘以 x 减去 ② 式乘以 y,有

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0.$$

于是,$x=0$,$y=0$,$x=y$,$x=-y$ 为四组解,对应地得驻点 $P_1(0,1)$,$P_2(0,-1)$,$P_3(1,0)$,$P_4(-1,0)$,$P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$,$P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\right.$

$-\frac{1}{\sqrt{2e}}\Big)$, $P_7\Big(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\Big)$, $P_8\Big(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\Big)$

代入原式,有函数 z 在点 P_1,P_2,P_3 和 P_4 皆无极值,由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ln(x^2+y^2)+\frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

于是在点 P_5,P_6 处有 $A=2,B=0,C=2,AC-B^2=4>0$,故函数 z 在点 P_5,P_6 取得极小值

$$z(P_5)=z(P_6)=-\frac{1}{2e}\approx-0.184.$$

在点 P_7,P_8 处,$A=-2,B=0,C=-2,AC-B^2=4>0$,于是函数 z 在点 P_7,P_8 取极大值

$$z(P_7)=z(P_8)=\frac{1}{2e}\approx 0.184.$$

【3640】 $z=x+y+4\sin x\sin y$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+4\cos x\sin y=0, & ①\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=1+4\sin x\cos y=0. & ②\end{cases}$$

于是由 ② − ① 有

$$\sin(x-y)=0,$$

因而 $x-y=n\pi$.

由 ② + ① 有

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2},$$

从而 $x+y=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

于是有驻点 $P_0(x_0,y_0)$,其中

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12} + (m+n)\dfrac{\pi}{2}, \\ y_0 = (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12} + (m-n)\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$(m,n = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

在点 P_0 处有

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= (-4\sin x_0\sin y_0)(-4\sin x_0\sin y_0) - (4\cos x_0\cos y_0)^2 \\ &= 16(\sin x_0\sin y_0 - \cos x_0\cos y_0)\cdot(\sin x_0\sin y_0 + \cos x_0\cos y_0) \\ &= -16\cos(x_0+y_0)\cos(x_0-y_0) \\ &= -16\cos\left[m\pi - (-1)^m\frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi \\ &= -16(-1)^{m+n}\cos\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当 m,n 有相同的奇偶性时,$m+n$ 为偶数,$AC-B^2<0$,于是无极值,当 m,n 有不同的奇偶性时,$m+n$ 为奇数,$AC-B^2>0$,有极值,由 A 的符号决定取极大值还是极小值,由于

$$\begin{aligned} A &= -4\sin x_0\sin y_0 = 2[\cos(x_0+y_0) - \cos(x_0-y_0)] \\ &= 2\left\{(-1)^m\cos\frac{\pi}{6} - (-1)^n\right\}. \end{aligned}$$

于是当 m 为奇数,n 为偶数时,$A<0$,取极大值,当 m 为偶数,n 为奇数时,$A>0$,取得极小值,极值为

$$z(x_0,y_0) = m\pi + \left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2\cdot(-1)^n.$$

【3641】 $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

解 由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) = 0. \end{cases}$$

得驻点 $P_0(0,0)$,$P(x_0,y_0)$,其中 $x_0^2+y_0^2=1$.

在 P_0 点处有 $z=0$,而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,$z>0$,故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z=0$.

由 1437 题有在满足 $x_0^2+y_0^2=1$ 的点 (x_0,y_0) 的邻域内，不论是 $x^2+y^2>1$ 还是 $x^2+y^2<1$ 皆有

$$z(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}<\mathrm{e}^{-1}.$$

但是点 (x_0,y_0) 的邻域内总有 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y)，因此，函数 z 在点 (x_0,y_0) 取得极大值 $z=\mathrm{e}^{-1}$.

【3642】 $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

解 $\mathrm{d}u=2(x+1)\mathrm{d}x+2(y+2)\mathrm{d}y+2(z-3)\mathrm{d}z$.

令 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2(x+1)=0,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2(y+2)=0,$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2(z-3)=0.$$

得驻点 $P_0(-1,-2,3)$，在 P_0 处

$$\mathrm{d}^2u=2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)>0,\text{当 }\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\neq 0\text{ 时}.$$

因此，函数 u 在点 P_0 处取得极小值 $u(P_0)=-14$.

【3643】 $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

解 $\mathrm{d}u=(3x^2+12y)\mathrm{d}x+(2y+12x)\mathrm{d}y+(2z+2)\mathrm{d}z$.

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0(0,0,-1)$，$P_1(24,-144,-1)$.

又 $\mathrm{d}^2u=6x\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

在 P_0 点处，有

$$\mathrm{d}^2u=2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}y(\mathrm{d}y+12\mathrm{d}x).$$

当 $\mathrm{d}z=0,\mathrm{d}y>0,\mathrm{d}y+12\mathrm{d}x<0$ 时，$\mathrm{d}^2u<0$，而当 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 皆大于零时，$\mathrm{d}^2u>0$，因此，d^2u 的符号不定，从而无极值.

在 P_1 点处，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=144\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=(12\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2\end{aligned}$$

>0 当 $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ 时

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1)=-6913$.

【3644】 $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}\qquad(x>0,y>0,z>0)$.

解 $du=\left(1-\dfrac{y^2}{4x^2}\right)dx+\left(\dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2}\right)dy+\left(\dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}\right)dz.$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1-\dfrac{y^2}{4x^2}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$,又

$$d^2u=\frac{y^2}{2x^3}dx^2-\frac{y}{x^2}dxdy+\left(\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}\right)dy^2-\frac{4z}{y^2}dydz+\left(\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}\right)dz^2,$$

在 P_0 点处有

$$\begin{aligned}d^2u&=4dx^2-4dxdy+3dy^2-4dydz+6dz^2\\&=(2dx-dy)^2+dy^2+(dy-2dz)^2+2dz^2.\end{aligned}$$

>0 当 $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ 时,

于是函数 u 在点 P_0 处取得极小值 $u(P_0)=4$.

【3645】 $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)\qquad(a>0)$.

解
$$\begin{aligned}du=&\,y^2z^3(a-2x-2y-3z)dx\\&+2xyz^3(a-x-3y-3z)dy\\&+3xy^2z^2(a-x-2y-4z)dz.\end{aligned}$$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3(a-x-3y-3z)=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0.\end{cases}$

在驻点 $P_0\left(\frac{a}{7},\frac{a}{7},\frac{a}{7}\right)$，直线 $x=0,2y+3z=a$，平面 $y=0$，平面 $z=0$ 和 3625 题方法类似，易知，直线 $x=0,2y+3z=a$ 及平面 $z=0$ 上的点不取得极值，$y=0$ 时，当 $xz^3(a-x-3z)>0$ 取得极小值 $u=0$，当 $xz^3(a-x-3z)<0$ 取得极大值 $u=0$，当 $xz^3(a-x-3z)=0$ 不取得极值. 在点 P_0 处有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=-\frac{2a^5}{7^5}(\mathrm{d}x^2+3\mathrm{d}y^2+6\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\\&=-\frac{a^5}{7^5}[(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)^2+\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+3\mathrm{d}z^2]\\&<0\qquad \text{当 } \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\neq 0 \text{ 时}.\end{aligned}$$

于是函数 u 在点 P_0 处取得极大值 $u(P_0)=\frac{a^7}{7^7}$.

【3646】 $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$

$(x>0,y>0,z>0,a>0,b>0)$.

解 $\mathrm{d}u=\left(\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}\right)\mathrm{d}z.$

由 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}-\frac{a^2}{x^2}=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{z}-\frac{x^2}{y^2}=0,\\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{b}-\frac{y^2}{z^2}=0.\end{cases}$

有驻点 $P_0\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^4b},\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b},\frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{1}{4}a^8b^7}\right)$，又

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=\frac{2a^2}{x^3}\mathrm{d}x^2+\frac{2}{y}\mathrm{d}x^2-\frac{4x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{2}{z}\mathrm{d}y^2\\&\quad+\frac{2x^2}{y^3}\mathrm{d}y^2-\frac{4y}{z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{2}{b}\mathrm{d}z^2+\frac{2y^2}{z^3}\mathrm{d}z^2\\&=\frac{2a^2}{x^3}\mathrm{d}x^2+\frac{2}{y}\left(\mathrm{d}x-\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right)^2\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{z}\left(\mathrm{d}y-\frac{y}{z}\mathrm{d}z\right)^2+\frac{2}{b}\mathrm{d}z^2.$$

在点 P_0 处，当 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\neq 0$ 时，$x>0,y>0,z>0,\mathrm{d}^2u>0$，于是函数 u 在点 P_0 处取得极小值

$$u(P_0)=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}.$$

【3647】 $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$.

$(0\leqslant x\leqslant\pi;0\leqslant y\leqslant\pi;0\leqslant z\leqslant\pi)$

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}u=&[\cos x-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}x\\&+[\cos y-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}y\\&+[\cos z-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y-\cos(x+y+z)=0,\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial z}=\cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

又 $x\in[0,\pi],y\in[0,\pi],z\in[0,\pi]$，得驻点 $P_0(0,0,0)$，$P_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$P_2(\pi,\pi,\pi)$，在点 P_1 处有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=&-\sin x\mathrm{d}x^2-\sin y\mathrm{d}y^2-\sin z\mathrm{d}z^2\\&+\sin(x+y+z)[\mathrm{d}(x+y+z)]^2\\=&-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2<0.\end{aligned}$$

于是函数 u 在 P_1 点处的极大值 $u(P_1)=4$.

又 P_0 和 P_2 是所考虑区域 $x\in[0,\pi],y\in[0,\pi],z\in[0,\pi]$ 的边界点，故函数在 P_0 和 P_2 处无极值.

【3648】 $u=x_1x_2^2\cdots x_n^n(1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n)$.

$(x_1>0,x_1>0,\cdots,x_n>0)$.

解 先考察满足 $1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n=0,x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0$ 的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，显然函数 u 在这种点达不到极值，事实上，不失一般性保持 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 不变，而将 x_1 增大任意

小的值，就有 $u<0$，但将 x_1 减小任意小的值，则有 $u>0$. 于是下面只需考察满足 $1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\neq 0, x_1>0,\cdots,x_n>0$ 的点 $(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，我们有

$$\mathrm{d}u=u\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x_k}\mathrm{d}x_k-\frac{u}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k$$

$$=u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\right)\mathrm{d}x_k\right],$$

考虑到 $x_k>0$ 和 $1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\neq 0$，于是有 $u\neq 0$，解方程组

$$\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}=0, k=1,2,\cdots,n.$$

有驻点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}=x_0,$$

$$\mathrm{d}^2u=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{x_k}-\frac{k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k}\right)\mathrm{d}x_k\right]\mathrm{d}u$$

$$+u\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{x_k^2}\right)\mathrm{d}x_k^2+\frac{1}{(1-\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k)^2}\right.$$

$$\left.\cdot(\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k)(-\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k)\right].$$

在 P_0 点处有

$$\mathrm{d}^2u=-\frac{u}{x_0^2}\left[\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k^2+(\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k)^2\right]$$

$$=-x_0^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k^2+(\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{d}x_k)^2\right]$$

$$<0 \qquad 当\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}x_k^2\neq 0 时.$$

于是函数 u 在 P_0 处取得极大值

$$u(P_0)=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}.$$

【3649】 $u=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{x_{n-1}}+\dfrac{2}{x_n}.$

$(x_i>0,i=1,2,\cdots,n).$

解 设 $y_1=x_1,y_2=\dfrac{x_2}{x_1},\cdots,$

$$y_k=\frac{x_k}{x_{k-1}},\cdots,y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}},$$

则 $x_n=y_1y_2\cdots y_n,y_k>0,(k=1,2,\cdots,n),$

且 $u=y_1+y_2+\cdots+\dfrac{2}{y_1y_2\cdots y_n}.$

令 $A=y_1y_2\cdots y_n,$

则有 $\mathrm{d}u=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{2}{Ay_k}\right)\mathrm{d}y_k.$

令 $\dfrac{\partial u}{\partial y_k}=0,$

得方程组 $1-\dfrac{2}{Ay_k}=0,k=1,2,\cdots,n.$

解之有驻点 $P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=2^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在 P_0 点处有

$$\mathrm{d}^2u\Big|_{P=P_0}=\frac{2}{A}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k^2}\mathrm{d}y_k^2+\frac{2}{A}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k}\mathrm{d}y_k\right)^2\Big|_{P=P_0}$$

$$=\frac{1}{y_0}\Big[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k)^2\Big]$$

>0 当 $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2\neq 0$ 时.

于是函数 u 在 P_0 点处取得极小值,即在

$$x_1=y_1=2^{\frac{1}{n+1}},x_2=y_2x_1=2^{\frac{2}{n+1}},\cdots$$

$$x_k = y_k x_{k-1} = 2^{\frac{k}{n+1}}, \cdots x_n = y_n x_{n-1} = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

处，函数 u 取得极小值

$$u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}.$$

【3650】 惠更斯问题 在 a 和 b 两个正数之间插入 n 个数 $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$，使得分数值

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)},$$

是最大的.

解 记

$$w = \frac{1}{u} = (a+x_1)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\left(1+\frac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{b}{x_n}\right),$$

设 $y_1 = \dfrac{x_2}{x_1}, y_2 = \dfrac{x_3}{x_2}, \cdots$

$$y_n = \frac{b}{x_n}, A = y_1 y_2 \cdots y_n,$$

则有 $x_1 = \dfrac{b}{y_1 y_2 \cdots y_n} = \dfrac{b}{A}$,

$$w = \left(a+\frac{b}{A}\right)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

又记 $m = a + \dfrac{b}{A}$,

则有 $\mathrm{d}w = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{w}{1+y_k}\mathrm{d}y_k - \dfrac{wb}{mA}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{d}y_k}{y_k} = w\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{y_k}{1+y_k} - \dfrac{b}{mA}\right)\dfrac{\mathrm{d}y_k}{y_k}$.

令 $\dfrac{\partial w}{\partial y_k} = 0$，有方程组

$\dfrac{y_k}{1+y_k} = \dfrac{b}{mA}, k = 1,2,\cdots,n.$

解方程组有驻点 $P_0(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = y_0.$$

在 P_0 点处有

$$\mathrm{d}^2 w\Big|_{P=P_0} = w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\Big(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\Big)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}\Big|_{P=P_0}$$

$$= w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\Big(\frac{y_k}{1+y_k}\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\Big)\Big|_{P=P_0} - w\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\left[\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}A}\right)\right]\Bigg|_{P=P_0}$$

$$= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0^2)}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2 + \frac{w(P_0)}{y_0\Big(1+\frac{a}{b}A\Big)^2_{P=P_0}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Big[\mathrm{d}y_k\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{aA}{by_k}\mathrm{d}y_k\Big)\Big]\Big|_{P=P_0}$$

$$= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\Big[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2 + \Big(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k\Big)^2\Big]$$

$$> 0 \qquad \text{当}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2 \neq 0\text{ 时}.$$

于是函数 w 在点 P_0 取得极小值,从而函数 u 在

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{A} = \dfrac{b}{y_0^n} = \dfrac{b}{a}\cdot a y_0^{-n} = a y_0^{n+1}\cdot y_0^{-n} = a y_0, \\ x_2 = x_1 y_1 = a y_0^2, \\ x_3 = x_2 y_2 = a y_0^3, \\ \cdots \\ x_n = \dfrac{b}{y_n} = \dfrac{b}{a} a y_0^{-1} = a y_0^{n+1} y_0^{-1} = a y_0^n. \end{cases}$$

也就是 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ 构成有公比为 $y_0 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时,其值最大,且 u 的最大值为

$$u = \frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}} = (a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}})^{-(n+1)}.$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值(3651 ~ 3653).

【3651】 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

解 对原式求微分有

$$(x-1)\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y + (z-2)\mathrm{d}z = 0.$$

于是当 $x=1, y=-1$ 时,$\mathrm{d}z=0$,代入原方程有 $z=6, z=-2$,又 $z=2$ 时不可微,求二阶微分有

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+(z-2)\mathrm{d}^2z+\mathrm{d}z^2=0.$$

把 $x=1,y=-1,z=6$ 代入,且 $\mathrm{d}z=0$ 有

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{4}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)<0.\text{当 }\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0\text{ 时}$$

于是当 $x=1,y=-1$ 时,隐函数 z 取得极大值 $z=6$,同理当 $x=1,y=-1$ 时,隐函数 z 也取得极小值,且其值为 $z=-2$.

易知,$z=2$ 是球的切平面平行于 Oz 轴的地方,因此函数 z 不取极值.

【3652】 $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$

解　对原式求微分有

$$(2x-z+2)\mathrm{d}x+(2y-z+2)\mathrm{d}y+(2z-x-y+2)\mathrm{d}z=0.$$

解方程组$\begin{cases}2x-z+2=0,\\2y-z+2=0,\\x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.\end{cases}$

有　$x_1=y_1=-(3+\sqrt{6}),z_1=-(4+2\sqrt{6})$,

$x_2=y_2=-(3-\sqrt{6}),z_2=2\sqrt{6}-4.$

再微分一次,且 $\mathrm{d}z=0$,有

$$2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+(2z-x-y+2)\mathrm{d}^2z=0.$$

在点 (x_1,y_1,z_1),

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2)>0.$$

于是当 $x=y=-(3+\sqrt{6})$ 时,取得极小值 $z=-(4+2\sqrt{6})$,同理有当 $x=y=-(3-\sqrt{6})$ 时,取得极大值 $z=2\sqrt{6}-4$,对于 $\mathrm{d}z$ 的系数 $2z-x-y+2=0$ 时的情况,与上题类似也不取极值.

【3653】 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

解　微分得

$$2(x^2+y^2+z^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=a^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z),$$

令 $\mathrm{d}z=0$,有

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0.$$

解方程有 $x=y=0, x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$.

把 $x=y=0$ 代入原方程,得 $z=0$,这是隐函数的一个奇点,把原式看作 z^2 的一个方程,舍去增根有

$$z^2=-(a^2+x^2+y^2)+\sqrt{a^4+3a^2(x^2+y^2)}.$$

显然 z 有正负两支在 $(0,0,0)$ 点相交,因此,不认为 z 在 $(0,0,0)$ 点取得极值. 把 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$ 代入原方程,有

$$x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2, z^2=\frac{a^2}{8}.$$

现将一次微分式改写为

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$$
$$+[2(x^2+y^2+z^2)+a^2]z\mathrm{d}z=0.$$

把上式再微分一次,及

$$\mathrm{d}z=0, x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2},$$

有 $$a^2z\mathrm{d}^2z=-2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2.$$

于是当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2, z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $\mathrm{d}^2z\leqslant 0$,函数 z 取得极大值 $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$,当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2, z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $\mathrm{d}^2z\geqslant 0$,函数 z 取得极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

求下列函数的条件极值点(3654 ~ 3670).

【3654】 $z=xy$,若 $x+y=1$.

解 设 $F(x,y)=xy+\lambda(x+y-1)$,

由 $$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda=0,\\ x+y=1.\end{cases}$$

有 $x=y=-\lambda=\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{4}$，因为当 $x\to\pm\infty$ 时，$y\to\mp\infty$，于是 $z=xy\to-\infty$，从而有 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 为条件极值点，且 $z=\frac{1}{4}$ 为极大值.

若把 $z=xy$ 改写为 $z=y(1-y)$，则成为普通极值，易知极大值点为 $y=\frac{1}{2}$，从而

$$x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},z=\frac{1}{4}.$$

【3655】 $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，若 $x^2+y^2=1$.

解 设 $F(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(x^2+y^2-1)$，

$$\text{由}\quad\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{a}+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{b}+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

$$\text{得}\qquad \lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\mid ab\mid},x=\mp\frac{b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}},y=\mp\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中　　$\alpha=\mathrm{sgn}ab\neq 0$.　　相应地 $z=\mp\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mid ab\mid}$.

由于函数 z 在闭圆周 $x^2+y^2=1$ 上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值，且最大值与最大值与最小值不相等.

因此，当 $x=-\frac{b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=-\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时，函数值 $z=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mid ab\mid}$ 必为最小值，从而是极小值，当 $x=\frac{b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时，$z=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mid ab\mid}$ 为最大值，从而是极大值.

【3656】 $z=x^2+y^2$,若$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

解 设 $F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1\right)$,

由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{a}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+\dfrac{1}{b}\lambda=0,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.\end{cases}$$

有
$$\lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于 $x\to\infty,y\to\infty$ 时,$z\to+\infty$,于是函数 z 必在有限处取得最小值,因此,当 $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时,函数 z 取得极小值
$$z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

【3657】 $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$,若 $x^2+y^2=1$.

解 设 $F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2-1)$,

于是有
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2[(A-\lambda)x+By]=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2[Bx+(C-\lambda)y]=0, & ②\\ x^2+y^2=1. & ③\end{cases}$$

由 $x^2+y^2=1$ 知,x,y 不全为零,从而 λ 必须满足方程
$$\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0. \qquad ④$$

当$(A-C)^2+4B^2=0$ 时,所研究的函数为常数,当$(A-C)^2+4B^2\neq 0$ 时,方程(4) 有两个不等的实根,记为λ_1 和$\lambda_2(\lambda_1>\lambda_2)$,由方程组 ①,②,③ 有
$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}},y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-\lambda)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}},y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-A)^2}}.$$

相应地有

$$\begin{aligned}z(x_1,y_1)&=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2\\&=(Ax_1+By_1)x_1+(Bx_1+Cy_1)y_1.\end{aligned}$$

由 ①,② 解得

$$Ax_1+By_1=\lambda_1x_1,Bx_1+Cy_1=\lambda_1y_1.$$

于是 $z(x_1,y_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_1y_1^2=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)=\lambda_1.$

同理 $z(x_2,y_2)=\lambda_1,z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2.$

因为函数 z 在单位圆周上连续,且不为常数,故必取得最大值和最小值并且最大值和最小值不相等. 这里有四个可能取得极值的点(x_i,y_i),$i=1,2,3,4$,而

$$z(x_1,y_1)=z(x_2,y_2)=\lambda_1,$$
$$z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2.$$

于是当 $x=x_{1,2}$,$y=y_{1,2}$ 时,函数 z 取得最大值 $z=\lambda_1$,因而也是极大值,当 $x=x_{3,4}$,$y=y_{3,4}$ 时,函数 z 取得最小值 $z=\lambda_2$,因而也是极小值.

【3657.1】 $z=x^2+12xy+2y^2$,若 $4x^2+y^2=25$.

解 设 $F(x,y)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25)$,令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+12y+8\lambda x=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=4y+12x+2\lambda y=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=4x^2+y^2-25=0, & ③\end{cases}$$

由 $4x^2+y^2=25$ 知,x,y 不全为零,于是 λ 满足方程

$$\begin{vmatrix}1+4\lambda & 6\\ 6 & 2+\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^2+9\lambda-34=0.$$

解之有 $\lambda_1=2,\lambda_2=-\dfrac{17}{4}$.

由方程组 ①,②,③ 有

$$\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=3,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=2,\\ y_2=-3,\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=\dfrac{3}{2},\\ y_3=4,\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=-\dfrac{3}{2},\\ y_4=-4.\end{cases}$$

相应地有 $z(x_1,y_1)=(-2)^2+12\times(-2)\times3+2\cdot3^2=-50$,

$$z(x_2,y_2)=2^2+12\cdot2\cdot(-3)+2\cdot(-3)^2=-50,$$

$$z(x_3,y_3)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+12\cdot\frac{3}{2}\cdot4+2\cdot4^2=106\frac{1}{4},$$

$$z(x_4,y_4)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-4)+2\cdot(-4)^2=106\frac{1}{4}.$$

由于函数 z 在椭圆周上连续,且不为常数,于是在椭圆周上必取最大值和最小值,这里有四个可能取极值的点 (x_i,y_i), $i=1,2,3,4$. 由上面的计算知

$$z(x_1,y_1)=z(x_2,y_2)=-50,$$

$$z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=106\frac{1}{4}.$$

从而当 $x=x_{1,2}$, $y=y_{1,2}$ 时,函数取最小值 $z=-50$,因而也是极小值,当 $x=x_{3,4}$, $y=y_{3,4}$ 时,函数取最大值 $z=106\dfrac{1}{4}$,故也是极大值.

【3658】 $z=\cos^2x+\cos^2y$,若 $x-y=\dfrac{\pi}{4}$.

解 设 $F(x,y)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda\left(x-y-\dfrac{\pi}{4}\right)$,

由 $$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\sin2x+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-\sin2y-\lambda=0,\\ x-y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

有　　$x_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad y_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

相应地，当 k 为偶数时，$z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$，当 k 为奇数时 $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得最大值和最小值，而且 z 又是关于 x, y 的周期（周期为 π）的函数，于是当 k 为偶数时，函数 z 在点 (x_k, y_k) 取得最大值 $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$，从而是极大值，当 k 为奇数时，函数 z 在点 (x_k, y_k) 取得最小值 $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$，从而是极小值.

【3659】 $u = x - 2y + 2z$，若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解　设

$$F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

有　　$x = \pm\frac{1}{3}, y = \pm\frac{2}{3}, z = \pm\frac{2}{3}.$

相应地，$u = \pm 3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数，故必取得最大值及最小值，且最大值与最小值不相等，这里有两个点可能取最值，当 $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$ 时，函数 u 的最大值 $u = 3$，因而也是极大值，当 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$ 时，函数 u 取得最小值 $u =$

-3，因而也是极小值.

【3660】 $u=x^{m}y^{n}z^{p}$，若 $x+y+z=a$.

$(m>0,n>0,p>0,a>0)$

解 设

$$w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z,$$

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a),$$

由 $$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{m}{x}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{y}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{p}{z}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ x+y+z=a.\end{cases}$$

有 $$x=\frac{am}{m+n+p},y=\frac{an}{m+n+p},$$

$$z=\frac{ap}{m+n+p}.$$

相应有 $$u=\frac{a^{m+n+p}m^{m}n^{n}p^{p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

由题意有 $x>0,y>0,z>0$，即连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a\\ z=0\end{cases},\begin{cases}y+z=a\\ x=0\end{cases},\begin{cases}z+x=a\\ y=0\end{cases},$$

组成，当点趋于边界上的点时，显然有 $w\to-\infty$，因此，函数 w 在区域内取得最大值，由于可能取最值点只有一个，于是当

$$x=\frac{am}{m+n+p},y=\frac{an}{m+m+p},$$

$$z=\frac{ap}{m+n+p},$$

时，函数 u 取最大值.

$$u=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

因而也是极大值.

【3661】 $u=x^2+y^2+z^2$. 若 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

$(a>b>c>0)$.

解 设

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\left(1+\dfrac{\lambda}{a^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y\left(1+\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\right)=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

有 $x=\pm a, y=z=0, x=z=0,$

$y=\pm b, x=y=0, z=\pm c.$

相应有

$$u(\pm a,0,0)=a^2, u(0,\pm b,0)=b^2,$$

$$u(0,0,\pm c)=c^2.$$

由 $a>b>c>0$，连续函数 u 在点 $(\pm a,0,0)$ 取得最大值 a^2，因而也是极大值，在点 $(0,0,\pm c)$ 取得最小值 c^2，因而也是极小值.

在点 $(0,\pm b,0)$ 处，对应的 $\lambda=-b^2$，且

$$\mathrm{d}^2F=2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\mathrm{d}x^2+2\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)\mathrm{d}y^2+2\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)\mathrm{d}z^2$$

$$= 2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2.$$

把 x,z 当作自变量,y 看成由条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所确定的 x 和 z 的函数,在点$(0,\pm b,0)$,有 $d^2u=d^2F$,而$1-\frac{b^2}{a^2}>0,1-\frac{b^2}{c^2}<0$,因此 d^2u 的符号不定,从而函数 u 在点$(0,\pm b,0)$ 不取极值.

【3662】 $u=xy^2z^3$,若 $x+2y+3z=\frac{a}{6}$.

$(x>0,y>0,z>0,a>0)$.

解 设

$$w=\ln u=\ln x+2\ln y+3\ln z,$$

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+2y+3z-a),$$

由

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{2}{\lambda}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{3}{z}-\frac{3}{\lambda}=0,\\ x+2y+3z=a.\end{cases}$$

有 $\qquad x=y=z=a.$

和 3660 题类似,函数 u 当 $x=y=z=\frac{a}{6}$ 时,取得极大值

$$u=\left(\frac{a}{6}\right)^6.$$

【3663】 $u=xyz$,若 $x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$.

解 设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$$+\mu(x+y+z),$$

由
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0, & ③ \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, & ④ \\ x + y + z = 0. & ⑤ \end{cases}$$

把 ① − ②，② − ③ 有

$$\begin{cases} (x-y)(2\lambda - z) = 0, & ⑥ \\ (y-z)(2\lambda - x) = 0. & ⑦ \end{cases}$$

由 ⑥，若 $x - y = 0$，代入 ⑤ 得 $z = -2x$，再代入 ④，得驻点

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\text{，和 } P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

如果 $x - y \neq 0$，则 $z = 2\lambda$，由 ⑦，若 $y - z = 0$，同理有驻点 $P_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$，$P_4\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$，若 $y - z \neq 0$，则 $x = 2\lambda$，于是 $x = z$，同理有驻点 $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$，$P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

相应有

$$u(P_1) = u(P_3) = u(P_5) = -\frac{1}{3\sqrt{6}},$$

$$u(P_2) = u(P_4) = u(P_6) = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

与前面各题的讨论一样，函数 u 在点 P_1，P_3 及 P_5 取得极小值 $u = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$，在 P_2，P_4，P_6 取得极大值 $u = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

【3663.1】 $u = xy + yz$，若 $x^2 + y^2 = 2$，$y + z = 2$.

$(x > 0, y > 0, z > 0)$

解 把 $z = 2 - y$ 代入 $u = xy + yz$ 有

$$u = xy + 2y - y^2$$

令 $F(x,y) = xy + 2y - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$

由 $\begin{cases} F_x = y + 2\lambda x = 0 \\ F_y = x + 2 - 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

有 $\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 & ① \\ x + (2\lambda - 2)y = -2 & ② \\ x^2 + y^2 = 2 & ③ \end{cases}$

由 $\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$

有 $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

于是当$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$时，方程组①，②无解，故有$\lambda \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$，由①，②有$\begin{cases} x = \dfrac{2}{4\lambda^2 - 4\lambda - 1}, \\ y = -\dfrac{4\lambda}{4\lambda^2 - 4\lambda - 1}. \end{cases}$

代入③有

$$16\lambda^4 - 32\lambda^3 + 8\lambda - 1 = 0$$

解之有

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \lambda_4 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

从而得驻点 $P_1(-1,1)$，$P_2(1,-1)$，$P_3\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}, -\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$，$P_4\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}, -\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$相应地有$u(-1,1) = 0$，$u(1,-1) = -4$，$u\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}, -\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$，$u\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}, -\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$，若$\lambda = 0$，由①，②，③的驻点$(\sqrt{2},0)$，$(-\sqrt{2},0)$，相应

地有 $u(\sqrt{2},0)=u(-\sqrt{2},0)$. 由于 $u=xy+2y-y^2$ 在 $x^2+y^2=2$ 上连续,故有最大值,最小值,于是 0 为最大值,$-\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$ 为最小值,从而 $(-1,1,1)$,$(\sqrt{2},0,2)$,$(-\sqrt{2},0,2)$ 为极小值点,$\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}},-\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},\dfrac{4+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ 为极大值点,对 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$,有

$$F(x_1,y)=xy+2y-y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{5}{2}y^2+2y+1,$$

相应驻点为$(1,-1)$,而

$$F'_x=-\frac{1}{2}\cdot 2x+y=-x+y$$
$$F'_y=x-\frac{5}{2}\cdot 2y+2=x-5y+2$$
$$F''_{xy}=1,F''_{xx}=-1$$
$$F''_{yy}=-5$$

于是 $\quad d^2F(1,-1)=-dx^2+2dxdy-5dy^2<0$

故在点$(1,-1,3)$ 处取极大值,对 $\lambda=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ 有

$$F(x,y)=xy+2y-2y^2+\frac{2-\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2-2)$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{1(2+\sqrt{3})}{2}y^2+xy+2y-2+\sqrt{3},$$

相应驻点为 $\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{3}},-\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$,又

$$F'_x=(2-\sqrt{3})x+y,$$
$$F'_y=-(2+\sqrt{3})y+x+2,$$
$$F''_{xy}=1,$$
$$F''_{xx}=2-\sqrt{3},$$

$$F''_{yy}=-(2+\sqrt{3}),$$

于是 $d^2F\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}},-\frac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=(2-\sqrt{3})dx^2+2dxdy-(2+\sqrt{3})dy^2)$ 符号不定,从而在点 $\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}},-\frac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}},\frac{4-3\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$ 处不取极值。

【3664】 $u=\sin x\sin y\sin z$,若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$.

$(x>0,y>0,z>0)$.

解 由

$$x+y+z=\frac{\pi}{2},$$

和 $x>0,y>0,z>0,$

有 $0<x<\frac{\pi}{2},0<y<\frac{\pi}{2},0<z<\frac{\pi}{2}.$

设 $w=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z,$

$$F(x,y,z)=w+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right),$$

于是令
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\cot x+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\cot y+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\cot z+\lambda=0,\\ x+y+z=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

有驻点 $P_0\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$(由 $x>0,y>0,z>0$)和 3660 题的讨论类似,当(x,y,z)趋于平面 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ 在第一卦限部分的边界时,$u\to0$,而在边界内部 $u>0$,因此,函数 u 在边界内部取得最大

值,故在点 P_0 取得极大值 $u(P_0)=\dfrac{1}{8}$.

【3665】 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$,若 $x^2+y^2+z^2=1$,

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$. $(a>b>c>0,\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

解 设

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$
$$+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma),$$

于是令
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2\left(\dfrac{1}{a^2}-\lambda\right)x+\mu\cos\alpha=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\left(\dfrac{1}{b^2}-\lambda\right)y+\mu\cos\beta=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\left(\dfrac{1}{c^2}-\lambda\right)z+\mu\cos\gamma=0, & ③\\ x^2+y^2+z^2=1, & ④\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & ⑤\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & ⑥\end{cases}$$

把①,②,③三式分别乘以 x,y,z 后相加,并注意到④,⑤两式有

$$\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u(x,y,z). \qquad ⑦$$

把①,②,③三式分别乘以 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,然后相加,并注意⑤,⑥两式有

$$\mu=-2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right), \qquad ⑧$$

把⑧代入①,②,③得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y-\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x+\left(\dfrac{\sin^2\beta}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z=0,\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y+\left(\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2}-\lambda\right)z=0.\end{cases} \qquad ⑨$$

要$\dfrac{x}{a^2},\dfrac{y}{b^2},\dfrac{z}{c^2}$为方程组⑨的非零解，必有

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha-a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta-b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma-c^2\lambda \end{vmatrix}=0.$$

展开计算有

$$\lambda\Big[\lambda^2-\Big(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\Big)\lambda + \Big(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\Big)\Big]=0. \qquad ⑩$$

由⑦知$\lambda\neq 0$，易知⑩式在消去λ后得到的二次方程有两个不等的实根$\lambda_1<\lambda_2$.

固定$\lambda=\lambda_1$，代入方程组⑨，可得到关于(x,y,z)有一个自由度的一个解系，再代入方程④，可得对应于$\lambda=\lambda_1$的两个驻点$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$，由⑦有，对应的$u(P_1)=u(P_2)=\lambda_1$，同理对应于$\lambda=\lambda_2$的两个驻点$P_3(x_3,y_3,z_3)$和$P_4(x_4,y_4,z_4)$，且有$u(P_3)=u(P_4)=\lambda_2$.

P_1,P_2,P_3,P_4为满足方程组①～⑤的一切解所对应的点，类似于前面各题的讨论有，函数u在点P_1和P_2处取得极小值λ，而在点P_3和P_4处取得极大值λ_2.

【3666】 $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$

若$Ax+By+Cz=0,x^2+y^2+z^2=R^2$，

$$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}$$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 设

$$F(x,y,z)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 +\lambda(Ax+By+Cz)+\mu(x^2+y^2+z^2-R^2),$$

令 $\xi=\rho\cos\alpha,\eta=\rho\cos\beta,$

$$\zeta=\rho\cos\gamma,\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-\rho\cos\alpha)+\lambda A+2\mu x=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-\rho\cos\beta)+\lambda B+2\mu y=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2(z-\rho\cos\gamma)+\lambda C+2\mu z=0, & ③\\ x^2+y^2+z^2=R^2, & ④\\ Ax+By+Cz=0, & ⑤\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. & ⑥\end{cases}$$

把 ①,②,③ 三式分别乘以 A,B,C,然后相加,注意 ⑤ 式有

$$-2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$

$$\lambda=\frac{2\rho(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}. \qquad ⑦$$

再把 ①,②,③ 三式分别乘以 x,y,z 后相加,注意 ④,⑤ 两式有

$$2(1+\mu)R^2=2\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma). \qquad ⑧$$

又把 ①,②,③ 三式分别乘以 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,然后相加,注意 ⑥ 式有

$$\begin{aligned}&2(1+\mu)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\\&=2\rho-\lambda(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)\\&=2\rho\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right].\end{aligned} \qquad ⑨$$

由 ⑧,⑨ 有

$$\begin{aligned}(1+\mu)^2R^2&=(1+\mu)\rho(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\\&=\rho^2\left[1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}\right],\end{aligned}$$

即

$$1+\mu=\pm\frac{\rho}{R}\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}. \qquad ⑩$$

由 ①,②,③ 有

$$x=\frac{2\rho\cos\alpha-\lambda A}{2(1+\mu)},\quad y=\frac{2\rho\cos\beta-\lambda B}{2(1+\mu)},\quad z=\frac{2\rho\cos\gamma-\lambda C}{2(1+\mu)}.$$

把 ⑦ 式和 ⑩ 式代入上式，得 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，其中 P_1 对应于 ⑩ 式取正号，P_2 对应于 ⑩ 式取负号，下面求 $u(P_1)$ 和 $u(P_2)$，由 ⑨，⑩ 可得

$$
\begin{aligned}
&x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\\
&=\pm R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
u(P_1)&=(x_1-\rho\cos\alpha)^2+(y_1-\rho\cos\beta)^2+(z_1-\rho\cos\gamma)^2\\
&=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-2\rho(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)+\rho^2\\
&=R^2+\rho^2-2\rho R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.
\end{aligned}
$$

同理有

$$
u(P_2)=R^2+\rho^2+2\rho R\cdot\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}.
$$

类似前面各的讨论，我们有 $u(P_2)$ 为极大值，$u(P_1)$ 为极小值.

【3667】 $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$.

若$\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1.(a_i>0,i=1,2\cdots n)$.

解 设

$$
\begin{aligned}
F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\\
&+\lambda\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}-1\right),
\end{aligned}
$$

解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0,i=1,2,\cdots,n,\\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}=1.
\end{cases}
$$

得驻点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$
x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1},i=1,\cdots,n.
$$

由于 $d^2u = d^2F = 2\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 > 0$（它不受约束条件的限制），故当 $x_i = \frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ 时，函数 u 取得极小值.

$$u = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}.$$

【3668】 $u = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p$, $\quad (p > 1)$

若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$. $\quad (a > 0)$

解 设

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = px_i^{p-1} + \lambda = 0, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a. \end{cases}$$

有 $\quad x_i = \frac{a}{n}, i = 1, 2, \cdots, n.$

由于 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} p(p-1)x_i^{p-2}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

于是当 $x_i = \frac{a}{n} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时

$$d^2F = p(p-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^{p-2} dx_i^2 > 0. \text{（当} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \neq 0 \text{ 时）}$$

它不受约束条件的限制，故函数 u 取得极小值 $u = \frac{a^p}{n^{p-1}}$.

【3669】 $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}$，若 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = 1$. $(\alpha_i > 0, \beta_i > 0, x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$

解 设

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}$$

$$+\lambda(\beta_1 x_2+\beta_2 x_2+\cdots+\beta_n x_n-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{\alpha_i}{x_i^2}+\lambda\beta_i=0, \qquad i=1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i x_i=1.\end{cases}$$

得 $$x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\Big)^{-1}, i=1,2,\cdots,n.$$

由于

$$\mathrm{d}^2F=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^3}\mathrm{d}x_i^2>0,$$

于是当 $x_i=\sqrt{\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\Big)^{-1}$ 时，函数 u 取得极小值，

$$u=\Big(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_i\beta_i}\Big)^2.$$

【3670】 $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$. $(a>0,\alpha_i>1,i=1,2,\cdots,n)$.

解 设

$$w=\ln u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i,$$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=w-\frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(\alpha_i\ln x_i-\frac{x_i}{\lambda}\Big)+\frac{a}{\lambda}.$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha_i}{x_i}-\dfrac{1}{\lambda}=0, i=1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a.\end{cases}$$

得 $$x_i=\frac{a\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}, i=1,2,\cdots,n.$$

由于

$$d^2 w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i^2} dx_i^2 < 0, (\text{当} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \neq 0 \text{ 时}),$$

不论 dx_i 之间有什么约束条件恒成立，于是函数 w 当 $x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, i = 1,2,\cdots,n$ 时，取得极大值，即函数 u 当 $x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ 时取得极大值.

$$u = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}.$$

【3671】 在条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ 下，求二次型 $u = \sum_{i,i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ij})$ 的极值.

解 设

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1),$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_1} = (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0, & (1) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0, & (2) \\ \cdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_n} = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda) x_n = 0, & (n) \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1. & (n+1) \end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解，必须矩阵(a_{ij})的特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 有解，其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵，E 为单位阵，于是特征方程必有 n 个实根，即有 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 满足 $|A - \lambda E| = 0$，对于任一根 λ_k，代入方程$(1) \sim (n)$，得$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的一个解空间，解空间的维数，等于 λ_k 的重数，解空间中的单位元素即方程组$(1) \sim (n+1)$的根，当 λ_k 是单重根时，解空间是一维的，单位元素只有两个，当 λ_k 是是多重根时，对应 λ_k 的单位元素就无穷多个了.

对于 λ_k 的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，显然满足方程组(1) ~ $(n+1)$. 因此，有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda_k x_i,i=1,2,\cdots,n.$$

从而有
$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k x_i^2=\lambda_k\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 上连续，故必取得最大值和最小值，于是，对应于 λ_1 和 λ_n 的解，分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n，因而也是 u 的极大值和极小值. 由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法，有对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k，二次型不能极值.

【3672】 若 $n\geqslant 1$ 和 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，证明不等式：

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

提示：在 $x+y=a$ 条件下，求解函数 $z=\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$ 的最小值.

证 考虑函数 $z=\dfrac{x^n+y^n}{2}$ 在条件 $x+y=a(a>0,x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的极值问题，设

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-a),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0,\\ x+y=a.\end{cases}$$

有 $x=y=\dfrac{a}{2}$，把点 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ 与边界点 $(0,a)$，$(a,0)$ 的函数值进行

比较.

$$z(0,a)=z(a,0)=\frac{a^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=z\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right),$$

$$(n>1),$$

于是函数 z 当 $x+y=a$ 时的最小值为 $\left(\frac{a}{2}\right)^n$，从而有

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n,(\text{当 } x+y=a,x\geqslant 0,y\geqslant 0 \text{ 时}).\quad ①$$

下面证明

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,(\text{当 } x\geqslant 0,y\geqslant 0 \text{ 时}).\quad ②$$

当 $x=y=0$ 时，不等式 ② 显然成立，当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 且 x，y 不同时为零时，令 $x+y=a$，则 $a>0$，于是由不等式 ① 有

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

因此，不等式 ② 成立，证毕.

【3673】 证明霍尔德尔不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{1/k'}$$

$$\left(a_i\geqslant 0,x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n;k>1,\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

提示：在条件 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A$ 下，求解函数 $u=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{1/k'}$ 的最小值.

证 首先证明函数

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}},$$

在条件 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A(A>0)$ 下的最小值是 A，用数学归纳法，当 $n=1$ 时，显然有

$$(a_1^k)^{\frac{1}{k}}(x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}}=a_1x_1=A.$$

设当 $n=m$ 时,命题成立,于是对任意 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m(a_i\geqslant 0)$ 当 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_ix_i=A(x_1\geqslant 0,\cdots,x_m\geqslant 0)$ 时,必有

$$A\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}.$$

下面证明当 $n=m+1$ 时命题也成立.

设 $$\sum_{i=1}^{m+1}a_ix_i=A,u=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}},$$

其中 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_i^k$. 求 u 的最小值,令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})$$
$$=u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})-\lambda\left(\sum_{i=1}^{m+1}a_ix_i-A\right),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{k}}}{k'}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}-1}(k'x_i^{k'-1})-\lambda a_i=0, & i=1,2,\cdots,m+1,\\ \sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i=A.\end{cases}$$

于是 $$\frac{x_i^{k'-1}}{a_i}=\frac{\lambda}{\alpha^{\frac{1}{k}}}\left(\sum_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}}=\mu^{k'-1},i=1,2,\cdots,m+1.$$

即 $$x_i=(a_i\mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}}=a_i^{\frac{1}{k'-1}}\mu=\mu a_i^{k-1}.$$

从而有

$$\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_ia_i^{k-1}=\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k=\mu\alpha=A,$$

$$\mu=\frac{A}{\alpha}.$$

于是得满足极值必要条件的唯一解.

$$x_i^0=\frac{A}{\alpha}a_i^{k-1};i=1,2,\cdots,m+1.$$

对应的函数值为

$$\begin{aligned}u_0 &= u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m+1}^0) = \alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{A}{\alpha}a_i^{k-1}\right)^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}} \\ &= \alpha^{\frac{1}{k}}\frac{A}{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m+1}a_i^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}} = \alpha^{\frac{1}{k}-1}A\left(\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\right)^{\frac{1}{k'}} \\ &= A\alpha^{\frac{1}{k}-1}\alpha^{\frac{1}{k'}} = A.\end{aligned}$$

所研究的区域$\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i = A, x_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,m+1)$，是$m+1$维空间中一个$m$维平面在第一卦限的部分，其边界由$m+1$个$m-1$维平面(一部分) 所组成：$x_i = 0, \sum\limits_{j=1}^{m+1}a_jx_j = A(a_j \geqslant 0, x_j \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m+1)$，在这些边界面上，求

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) &= u(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \\ &= \alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_j^{k'} + \sum_{j=i+1}^{m+1}x_j^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}},\end{aligned}$$

的最小值变为求m个变量的最小值，以估计$x_{m+1} = 0, \sum\limits_{i=1}^{m}a_ix_i = A$的最小值为例，由归纳法假设，又

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m+1}a_j^k \geqslant \sum_{i=1}^{m}a_i^k,$$

有
$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0) &= \alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \\ &\geqslant \left(\sum_{i=1}^{m}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \geqslant \sum_{i=1}^{m}a_ix_i = A.\end{aligned}$$

因此，u在边界面上的最小值不小于A，由此知，u在区域上的最小值为$u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m+1}^0) = A$，于是命题当$n = m+1$时也成立，故由归纳法知

当$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i = A, x_i \geqslant 0(i = 1,2,3,\cdots,n)$时.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \geqslant A, \qquad ①$$

下面证明霍尔德尔不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{i}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} (a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0), \qquad ②$$

成立,事实上,若$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$,② 式显然成立. 若$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i > 0$,令$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = A$,则 $A > 0$,于是,根据不等式 ① 知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \geqslant A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

于是不等式 ② 成立,证毕.

【3674】 对于 n 阶行列式 $A = | a_{ij} |$,证明阿达玛不等式:

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)$$

提示:在存在下列关系式

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

时,研究行列式 $A = | a_{ij} |$ 的极值.

证 设

$$A = (a_{ij}),\ | A | = | a_{ij} |,$$

考虑函数

$$u = | A | = | a_{ij} |,$$

在条件$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 下的极值问题,其中 $S_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 之点集是有界闭集,故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值,下面求函数 u 满足条件极值的必要条件,设

$$F = u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - S_i\right),$$

由于函数 u 是多项式. 当按第 i 行展开时,有

$$u = | A | = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0, i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

得
$$a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\lambda_i}.$$

当 $i \neq k$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij} a_{kj}}{2\lambda_i} = \frac{1}{2\lambda_i} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_{kj} = 0.$$

于是当函数 u 满足极值的必要条件时，行列式不同的两行所对应的向量必直交，各以 A' 表示 A 的转置矩阵，则由行列式的乘法有

$$u^2 = |A'| \cdot |A| = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} S_i.$$

因此，函数 u 满足极值的必要条件时，必有

$$u = \pm \sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}.$$

由于 u 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 下不恒为常数，于是

$$u_{\max} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}, u_{\min} = -\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}.$$

从而

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i, (\text{当} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i (i = 1, 2, \cdots, n) \text{时}) \quad ①$$

下面证明 $|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$. ②

若至少有一个 i，使 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$，则 $a_{ij} = 0, j = 1, 2, \cdots, n$. 从而 $|A| = 0$，于是不等式 ② 显然成立，若对一切 $i, i = 1, 2, \cdots, n$，都有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \neq 0$，令 $s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$，则 $s_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，于是，由不

等式 ① 有

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

故不等式 ② 成立,证毕.

在指定域内确定以下函数的最大值(sup)和最小值(inf)(3675 ~ 3679).

【3675】 $z = x - 2y - 3$,若 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x + y \leqslant 1$.

解 设

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1, 0 \leqslant x + y \leqslant 1\},$$

它是闭三角形,即为一个有界闭区域,故连续函数 z 在其上必有最大值和最小值,由于 z 是 x,y 的线性函数,于是不存在驻点,因上,最大值与最小值都在 D 的边界上达到,D 的边界为三条直线段:$y = 0(0 \leqslant x \leqslant 1)$,$x = 0(0 \leqslant y \leqslant 1)$,$x + y = 1(0 \leqslant x \leqslant 1)$,在其上 z 分别变成一元函数:$z = x - 3(0 \leqslant x \leqslant 1)$,$z = -2y - 3(0 \leqslant y \leqslant 1)$,$z = 3x - 5(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 由于这些函数都是一元线性函数,故也无驻点,其最大值与最小值必在此三线段的端点(即点 $(0,0)$,点 $(1,0)$,点 $(0,1)$)达到,由此可知,z 在 D 上的最大值与最小值必在此三点 $(0,0)$,$(1,0)$,$(0,1)$ 达到,由于 $z(0,0) = -3$,$z(1,0) = -2$,$z(0,1) = -5$,于是 $\sup z = -2$,$\inf z = -5$.

【3676】 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$,若 $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

解 由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

知在 $x^2 + y^2 < 25$ 内无解,于是连续函数 z 的最大值与最小值必在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上达到.

考虑函数 z 在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上的条件极值,设

$$F(x,y) = z - \lambda(x^2 + y^2 - 25),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-12-2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+16-2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$$

得驻点 $P_1(3,-4)$,$P_2(-3,4)$,由于

$$z(3,-4)=-75,\qquad z(-3,4)=125,$$

于是 $\qquad \sup z=125,\qquad \inf z=-75.$

【3677】 $z=x^2-xy+y^2$,若 $|x|+|y|\leqslant 1$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-x=0.\end{cases}$$

且 $|x|+|y|<1$,有驻点 $P_0(0,0)$,相应地,$z(P_0)=0$,

再在边界:$x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y=1$ 上求驻点,设

$$F_1=x^2-xy+y^2-\lambda(x+y-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=2x-y-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}=2y-x-\lambda=0,\\ x+y=1.\end{cases}$$

得驻点 $P_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,相应有 $z(P_1)=\dfrac{1}{4}$.

同理,在另外三条边界线:$x\geqslant 0,y\leqslant 0,x-y=1$ 上,$x\leqslant 0,y\geqslant 0,x-y=-1$ 上,$x\leqslant 0,y\leqslant 0,x+y=-1$ 分别求得驻点 $P_2\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$,$P_3\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,$P_4\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$,相应有

$$z(P_2)=z(P_3)=\frac{3}{4},z(P_4)=\frac{1}{4}.$$

最后在上述四条边界线的端点 $P_5(1,0)$,$P_6(0,1)$,$P_7(-1,0)$ 及 $P_8(0,-1)$ 上求函数值

$$z(P_6)=z(P_5)=z(P_7)=z(P_8)=1,$$

比较 $z(P_i)$,$i=0,1,2,\cdots,8$,有

$$\sup z=1,\inf z=0.$$

【3678】 $u=x^2+2y^2+3z^2$,若 $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$.

解 易知函数 u 在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$ 的驻点为 $P_0(0,0,0)$,而在边界 $x^2+y^2+z^2=100$ 上的驻点为 $P_1(10,0,0)$,$P_2(-10,0,0)$,$P_3(0,10,0)$,$P_4(0,-10,0)$,$P_5(0,0,10)$ 和 $P_6(0,0,-10)$,相应地 $u(P_0)=0$,$u(P_1)=u(P_2)=100$,$u(P_3)=u(P_4)=200$,$u(P_5)=u(P_6)=300$,于是

$$\sup u=300,\inf u=0.$$

【3679】 $u=x+y+z$,若 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$.

解 讨论的区域由曲面 $x^2+y^2=z$ 和平面 $z=1$,$x^2+y^2\leqslant 1$ 所围成,两个曲面的交线为 $x^2+y^2=z=1$.

易知区域内部无驻点,在边界面 $z=1$,$x^2+y^2\leqslant 1$ 的内部,$u(x,y,1)=x+y+1$ 也无驻点,在边界面 $x^2+y^2=z(0\leqslant z\leqslant 1)$ 上,有

$$u=x+y+x^2+y^2,(x^2+y^2\leqslant 1).$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1+2x=0,\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=1+2y=0.\end{cases}$$

得驻点 $P_1\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,相应地,$u(P_1)=-\dfrac{1}{2}$,在边界线 $x^2+y^2=z=1$ 上,设

$$F(x,y)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

得驻点 $P_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$，$P_3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$，相应有

$$u(P_2)=1+\sqrt{2},u(P_3)=1-\sqrt{2}.$$

于是 $$\sup u=1+\sqrt{2},\inf u=-\frac{1}{2}.$$

【3680】 在域 $x>0,y>0,\ z>0$ 内求函数

$$u=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)},$$

的下确界(inf) 和上确界(sup).

解 函数 u 在区域 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 上是连续函数，因此，把区域扩大包括边界时，上、下确界不变，下面就扩大后的区域加以讨论，显然当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 时 $u\geqslant 0$，且 $u(0,0,0)=0$，故 $\inf u=0$，在区域内部，由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{-(x+2y+3z)}[1-(x+y+z)],\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-(x+2y+3z)}[1-2(x+y+z)],\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=e^{-(x+2y+3z)}[1-3(x+y+z)].\end{cases}$$

而 $e^{-(x+2y+3z)}\neq 0$，于是函数 u 在该域内无驻点，又

$$\begin{aligned}u&=(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}\\&=(x+y+z)e^{-(x+y+z)}\cdot e^{-(y+2z)}\\&\leqslant(x+y+z)e^{-(x+y+z)}((x+y+z)\to+\infty).\end{aligned}$$

于是函数 u 的最大值必在有限的边界上达到，考虑界面：

$$x=0;u(0,y,z)=(y+z)e^{-(2y+3z)},y\geqslant 0,z\geqslant 0.$$
$$y=0;u(x,0,z)=(x+z)e^{-(x+3z)},x\geqslant 0,z\geqslant 0.$$
$$z=0;u(x,y,0)=(x+y)e^{-(x+2y)},x\geqslant 0,y\geqslant 0.$$

同理,这些界面上无驻点.

考虑边界线:$x=0,y=0,z\geqslant 0,u(0,0,z)=ze^{-3z}$,得驻点 $P_1\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$,相应地,$u(P_1)=\frac{1}{3}e^{-1}$,同理在边界线 $x=0,z=0,y\geqslant 0$ 上可解得驻点 $P_2\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,在边界线:$y=0,z=0,x\geqslant 0$ 上有驻点 $P_3(1,0,0)$,相应地,$u(P_2)=\frac{1}{2}e^{-1}$,$u(P_3)=e^{-1}$,边界线的一端为原点,另一端伸向无穷远,于是

$$\sup u=e^{-1}.$$

【3681】 证明:函数

$$z=(1+e^y)\cos x-ye^y,$$

具有无穷多个极大值而没有一个极小值.

证 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y)=0.\end{cases}$$

有 $$x=k\pi,y=(-1)^k-1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由于 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-2-y).$$

于是在点$(2m\pi,0)(m=0,\pm1,\cdots)$,$A=-2,B=0,C=-1$ 及 $AC-B^2=2>0$,此时函数 z 取得极大值,而在点$((2m+1)\pi,-2)(m=0,\pm1,\cdots)$,$A=1+e^{-2},B=0,C=-e^{-2}$ 及 $AC-B^2=-e^{-2}-e^{-4}<0$,此时函数 z 无极值.

【3682】 函数 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 点上有极小值是否意味着这个函数在沿着经过 M_0 点的每一根直线都有极小值?研究例题 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$.

解 对于每一条通过原点的直线

$$y = kx,(-\infty < x < +\infty),$$

皆有
$$f(x,kx) = (x - k^2x^2)(2x - k^2x^2)$$
$$= x^2(1 - k^2x)(2 - k^2x).$$

当 $0 < |x| < \dfrac{1}{k^2}$ 时，$f(x,kx) > 0$，但 $f(0,0) = 0$，因此，函数 $f(x,y)$ 在直线 $y = kx$ 上在原点取得极小值零.

对于通过原点的另一条直线：$x = 0$ 有 $f(0,y) = y^4$，于是在原点也取得极小值零.

因此，函数 $f(x,y)$ 在一切通过原点的直线上皆有极小值，但

$$f(a,\sqrt{1.5a}) = -0.25a^2 < 0,(a > 0).$$

因此，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不取极小值，此例说明：尽管 $f(x,y)$ 在沿着过点 M_0 的每一条直线上在 M_0 均有极小值，但却不能保证 $f(x,y)$ 作为二元函数在点 M_0 一定有极小值.

【3683】 将指定的正数 a 分解成 n 个正的因数，使他们的倒数的和为最小.

解 由题意，我们考虑 $u = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}$ 在条件 $a = \prod\limits_{i=1}^{n}x_i$ 或 $\ln a = \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\,(a > 0, x_i > 0)$ 下的极值，设

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = u + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \ln a\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = -\dfrac{1}{x_i^2} + \dfrac{\lambda}{x_i} = 0, i = 1,2,\cdots,n,\\ a = \prod\limits_{i=1}^{n}x_i.\end{cases}$$

有
$$x_i = \frac{1}{\lambda}, i = 1,2,\cdots,n.$$

从而有
$$x_1^0 = x_2^0 = \cdots = x_n^0 = a^{\frac{1}{n}}, u(x_1^0,x_2^0,x_n^0) = na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 趋向于边界时,至少有一个 $x_i\to 0$,即 $\frac{1}{x_i}\to+\infty$,而 $u>\frac{1}{x_i}$,故 $u\to+\infty$,因此,函数 u 必在区域内部取得最小值,于是,将正数 a 分为 n 个相等的正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$ 时,其倒数和 $na^{-\frac{1}{n}}$ 最小.

【3684】 将指定的正数 a 分解成 n 个加数,使他们的平方和为最小.

解 考虑函数 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 在条件 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\,(a>0)$ 下的极值,设

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\Big),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\lambda=0, i=1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}=a.\end{cases}$$

有

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=\frac{a}{n},$$

$$u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\frac{a^2}{n}.$$

当 n 个相加数中有若干个相加数 $\to\pm\infty$ 时,平方和 $\to+\infty$,因此,函数 u 必在有限区域内取得最小值,于是,把正数 a 分解为 n 个相等的相加数 $\frac{a}{n}$ 时,其平方和 $\frac{a^2}{n}$ 最小.

【3685】 将指定的正数 a 分解成 n 个正的因数,使他们指定的正数幂之和为最小.

解 考虑函数

$$u=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i},(\alpha_i>0),$$

在条件 $\ln a=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i,(a>0,x_i>0)$,

下的极值,设

$$F = u - \lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\ln x_i - \ln a\right),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} - \dfrac{\lambda}{x_i} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n, & ①\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \ln a. & ②\end{cases}$$

由 ① 有

$$x_i = \left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}},$$

代入 ② 有

$$\ln a + \sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\alpha_i}{\alpha_i} = \ln\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i},$$

令 $\beta = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\alpha_i}$,

则有 $\lambda = a^{\frac{1}{\beta}}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\beta\alpha_i}} = \left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$,

$$x_0 = \frac{\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}, i = 1,2,\cdots,n,$$

$$u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\alpha_i} = \beta\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\right)\left(a\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}}.$$

显然,函数 u 在区域内部达到最小值,于是,所求得的 u 即为最小值.

【3686】 在平面上给出 n 个质点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\cdots P_n(x_n,y_n)$,其质量相应地等于 $m_1, m_2,\cdots m_n$.

点 $P(x,y)$ 在什么位置,系统对这个点的转动惯量是最小的?

解 设 $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}m_i[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]$,

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\sum\limits_{i=1}^{n}m_i(x-x_i)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=2\sum\limits_{i=1}^{n}m_i(y-y_i)=0.\end{cases}$$

有 $\qquad x_0=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i, y_0=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i,$

其中 $\qquad M=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i.$

当 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$ 时，$f\to+\infty$，因此，点 $P(x_0,y_0)$ 即为所求.

【3687】 在怎样的尺寸下容积 V 一定的开敞式长方体浴缸表面积是最小的?

解 设浴缸长、宽、高分别为 x,y,h，则考虑函数

$$S=2(x+y)h+xy,$$

在条件 $\quad V=xyh,(x>0,y>0,h>0),$

下的极值. 设

$$F(x,y,h)=S-\lambda(xyh-V),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2h-\lambda yh=0, & ①\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2h-\lambda xh=0, & ②\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial h}=2(x+y)-\lambda xy=0, & ③\\[2ex]xyh=V.\end{cases}$$

由 ①,②,③ 有

$$\frac{1}{h}+\frac{2}{y}=\lambda=\frac{1}{h}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}.$$

于是 $\qquad x_0=y_0=2h_0=\sqrt[3]{2V},$

$$h_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定，一定在某一处达到最小，因此，当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$，高为 $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$ 时，浴盆的表面积最小，且最小表面积为 $S = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

事实上，当 x, y, h 中有任一趋于零，如 $h \to +0$，则由 $V = xyh$ 即可断定 $xy \to +\infty$，但 $S > xy$，于是 $S \to +\infty$，当 x, y, h 中有任一个趋于 $+\infty$ 时，一定引起至少有另一个趋于零，重复上面的讨论知 $S \to +\infty$，因此，连续函数 S 必在区域内部取得最小值.

【3688】 半圆形横断面的开敞式圆柱体浴缸的表面积等于 S，在怎样的尺寸下该浴缸具有最大容积？

解 设圆柱半径为 r，高为 h，则考虑函数 $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h$ 在条件

$$S = \pi(r^2 + rh) \qquad (r > 0, h > 0),$$

下的极值，不妨忽略系数 $\dfrac{1}{2}\pi$. 设

$$F = r^2 h - \lambda\left(r^2 + rh - \frac{S}{\pi}\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = 2rh - \lambda(2r + h) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial h} = r^2 - \lambda r = 0, \\ r^2 + rh = \dfrac{S}{\pi}. \end{cases}$$

有 $$r_0 = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, h_0 = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

从而有 $$V_0 = \frac{1}{2}\pi r_0^2 h_0 = \sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}.$$

由实际情况知，V 一定达到最大体积，因此，当 $h_0 = 2r_0 = 2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ 时，体积 $V_0 = \sqrt{\dfrac{S^3}{27\pi^3}}$ 最大.

事实上,由 $r^2+rh=\dfrac{S}{\pi}$ 知 r^2 和 rh 恒有界,当 $r\to+0$ 或 $h\to+0$ 时必有 $V\to 0$,当 $h\to+\infty$ 时,由 rh 有界可推出 $r\to+0$,因而 $V\to 0$(显然不可能 $r\to+\infty$),于是,体积 V 必在区域内部达到最大值.

【3689】 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求出一个点,使这一点到指定的 n 个点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 距离的平方和是最小的.

解 考虑函数

$$u=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2],$$

在条件 $x^2+y^2+z^2=1$,

下的极值,设

$$F(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)-\lambda x\Big]=2\Big[(n-\lambda)x-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\Big]=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\Big[(n-\lambda)y-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\Big]=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\Big[(n-\lambda)z-\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\Big]=0, & ③\\ x^2+y^2+z^2=1. & ④\end{cases}$$

由 ①,②,③ 有

$$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\qquad y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

代入 ④ 有

$$(n-\lambda)^2=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}z_i\Big)^2$$

$$= N^2, (N > 0).$$

于是有 $\quad x' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i, y' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i, z' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i.$

及 $\quad x'' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i, y'' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i, z'' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i.$

从而 $\quad u(x', y', z')$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 + (z' - z_i)^2]$$

$$= n(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2x'\sum_{i=1}^{n} x_i - 2y'\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$- 2z'\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$= n - \frac{2}{N}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big)^2 + \big(\sum_{i=1}^{n} y_i\big)^2 + \big(\sum_{i=1}^{n} z_i\big)^2\Big]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$= n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

同理有 $\quad u(x'', y'', z'') = n + 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$

$$> u(x', y', z').$$

由函数 u 在闭球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上连续，于是必取得最大值及最小值，从而当 $x = x', y = y', z = z'$ 时，u 最小，同时也说明当 $x = x'', y = y'', z = z''$ 时，u 最大.

【3690】 由直圆筒并用直圆锥作顶的一个物体，该物体给定的全表面积等于 Q，求其体积最大时的尺寸是多少？

解 设圆柱部分的底半径为 R，高为 h，圆锥部分的母线与底面的夹角为 α，则有 $\pi R^2 + 2\pi Rh + \frac{\pi R^2}{\cos\alpha} = Q$ 为常数，其中 $R > 0$，$h > 0, 0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$，考虑函数

$$V(\alpha,h,R)=\pi R^2 h+\frac{1}{3}\pi R^3\tan\alpha,$$

在上述条件下的极值,设

$$F(\alpha,h,R)=3R^2 h+R^3\tan\alpha-\lambda\left(R^2+2Rh+\frac{R^2}{\cos\alpha}-\frac{Q}{\pi}\right),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{R^3}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda R^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=3R^2-2R\lambda=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial R}=6Rh+3R^2\tan\alpha-\left(2R+2h+\dfrac{2R}{\cos\alpha}\right)\lambda=0, & ③\\ R^2+2Rh+\dfrac{R^2}{\cos\alpha}=\dfrac{Q}{\pi}. & ④\end{cases}$$

由②有

$$\lambda=\frac{3}{2}R,$$

代入①,得

$$\sin\alpha=\frac{2}{3},$$

由于 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$,

于是由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$,

有 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3},\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$

代入③得

$$6Rh+\frac{6}{\sqrt{5}}R^2=3R^2+3Rh+\frac{9}{\sqrt{5}}R^2,$$

即 $Rh=R^2+\frac{R^2}{\sqrt{5}},$

或　　$h=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)R.$

代入 ④ 有

$$R^2+\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)R^2+\frac{3}{\sqrt{5}}R^2=\frac{Q}{\pi},$$

从而　　$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$

相应地有 $V_0=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\tan\alpha$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^3=\left(1+\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^2\cdot R$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{3}\pi\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

现考虑边界情形，由 ④ 知 R^2,Rh 及$\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 皆为正的有界量.

1°　当 $R\to+0$ 时，由 Rh 及$\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知

$$V=\pi(Rh)R+\frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha\cdot R\to 0.$$

2°　当 $h\to+0$ 时，需要有当圆锥全面积 $\pi R^2+\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}=Q$（常数）时，圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^3\tan\alpha$ 的最大值，用 l 表示圆锥的斜高，

即　　$l=\frac{R}{\cos a},$

$$R\tan a=\sqrt{\frac{R^2}{\cos^2 a}-R^2}=\sqrt{l^2-R^2},$$

于是　　$l=\frac{Q-\pi R^2}{\pi R},V=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}.$

故 $$V^2=\frac{1}{9}QR^2(Q-2\pi R^2),R\in\left(0,\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right).$$

于是易知 V^2 当 $R^2=\frac{Q}{4\pi}\left(\text{即 } R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)$时达最大值,且最大

体积 $$V_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

易验证 $V_1<V_0$.

3° 当 $h\to+\infty$ 时,由 Rh 有界知 $R\to+0$,由 1° 知 $V\to 0$.

4° 当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-$ 时,由$\frac{R^2}{\cos\alpha}$有界可知 $R\to+0$,由 1° 知 $V\to 0$.

5° 当 $\alpha\to+0$ 时,可以求得达到最大体积的尺寸为

$$h=2R,$$

及 $$Q=\sqrt[3]{54\pi V_2^2}.$$

即 $$V_2=\sqrt{\frac{Q^3}{54\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{18}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

易证 $V_2<V_0$.

综上所述,我们有当 $R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{Q}{\pi}},\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$ 时,所研究的体积 V 达到最大值

$$V_0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

【3691】 物体的体积等于 V,该物体是个直角平行六面体,其上下底是同样的正四角锥.在角锥侧面与它的底成什么样的倾角时使物体的总表面积是最小的?

解 设长方体两底(正方形)边长为 a,高为 h,棱锥侧面与底面的夹角为 α,则

$$V=a^2h+\frac{1}{3}a^3\tan\alpha$$

考虑函数

$$S = 4ah + \frac{2a^2}{\cos\alpha},$$

在上述条件下的极值，设

$$F = S - \lambda\left(a^2h + \frac{1}{3}a^3\tan\alpha - V\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 4h + \dfrac{4a}{\cos\alpha} - 2\lambda ah - \lambda a^2\tan\alpha = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial h} = 4a - \lambda a^2 = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = \dfrac{2a^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\lambda a^3}{3\cos^2\alpha} = 0, & ③ \\ a^2h + \dfrac{1}{3}a^3\tan\alpha = V. & ④ \end{cases}$$

由 ②,③ 有 $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{3}$.

由 3690 进一步可求出 a 和 h.

类似 3687 题的讨论，当 $a \to +0$，$a \to +\infty$，$h \to +\infty$，$\alpha \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ 等情形皆能证明 $S \to +\infty$，对于边界为 $\alpha = 0$ 及 $h = 0$ 这两种退化情况，类似 3690 题，可证明，此时的全表面积比 $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{3}$ 时的全表面积为大，于是，当 $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{3}$ 时，物体的全表面积最小.

【3692】 矩形的周长为 $2P$，求绕其一边旋转可形成最大体积的那个矩形.

解 设矩形的边长为 x 和 y，考虑函数 $V = \pi y^2 x$ 在条件 $x + y = p$ 下的极值，设

$$F = V - \lambda(x + y - p),$$

解方程组

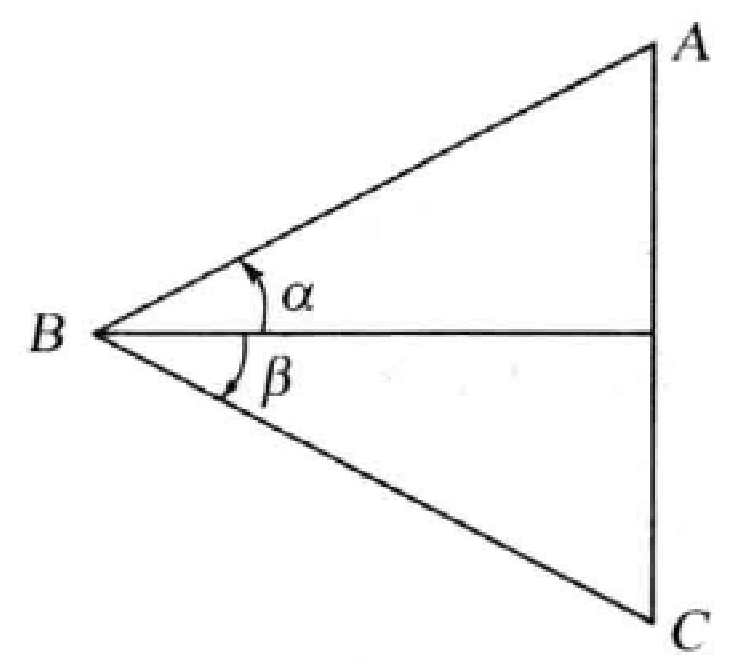
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\pi y^2-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\pi xy-\lambda=0,\\ x+y=p.\end{cases}$$

有 $$x=\frac{p}{3},y=\frac{2p}{3}.$$

由于在边界上，一边为零，一边为 p，有 $V=0$，于是，当矩形的两边分别为 $\frac{p}{3}$，$\frac{2p}{3}$ 时，旋转体的体积最大.

【3693】 已知三角形的周长为 $2p$，求出这样的三角形，当它绕着自己的一边旋转所构成的体积最大.

解 如3693题图所示以 AC 为轴旋转的参数：高 h 及二角 α，β. 考虑函数



3693 题图

$$V=\frac{1}{3}\pi h^3(\tan\alpha+\tan\beta),$$

在条件 $$\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\cos\beta}+h(\tan\alpha+\tan\beta)=2p,$$

下的极值. 不妨略去常数 $\frac{1}{3}\pi$，设

$$F=h^3(\tan\alpha+\tan\beta)$$
$$-\lambda\left(\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\cos\beta+h}+h\tan\alpha+h\tan\beta-2p\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial h} = 3h^2(\tan\alpha + \tan\beta) - \lambda\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos\beta} + \tan\alpha + \tan\beta\right) = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = \dfrac{h^3}{\cos^2\alpha} - \lambda h\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right) = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = \dfrac{h^3}{\cos^2\beta} - \lambda h\left(\dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta} + \dfrac{1}{\cos^2\beta}\right) = 0, & ③ \\ h\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos\beta} + \tan\alpha + \tan\beta\right) = 2p. & ④ \end{cases}$$

由 ②,③ 有

$$\alpha = \beta, \lambda = \frac{h^2}{1+\sin\alpha} = \frac{h^2}{1+\sin\beta},$$

代入 ① 式,得 $\sin\alpha = \sin\beta = \dfrac{1}{3}$,

于是 $\qquad h\tan\alpha = \dfrac{h}{3\cos\alpha}$,代入 ④ 式,有

$$\frac{h}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}p.$$

从而得三边分别为

$$AB = BC = \frac{3}{4}p, AC = 2h\tan\alpha = \frac{p}{2}.$$

讨论边界情形,当 $h \to +0$ 或 $h \to p$ 时,显然有 $V \to 0$,对于二角 α 及 β 必有大小限制:$0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$,$-\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha$,当 $\alpha \to +0$ 或 $\alpha \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ 或 $\beta \to -\alpha$ 时,同样皆有 $V \to 0$,于是,当三角形的三边长分别为 $\dfrac{p}{2}, \dfrac{3p}{4}, \dfrac{3p}{4}$,并绕长为 $\dfrac{p}{2}$ 的边旋转时,所得的体积最大.

【3694】 如何在半径为 R 的半球中嵌入具最大体积的直角平行六面体.

解 不失一般性.设此长方体的一个底面与半球所在的底面重合,另外四个顶点在半球球面上,且半球面在直角坐标系下的方程为 $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z \geqslant 0.$

又设长方体的长、宽、高分别为 $2x, 2y$ 及 $z(x > 0, y > 0, z > 0)$,

考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值,设

$$F=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2),$$

解方程组

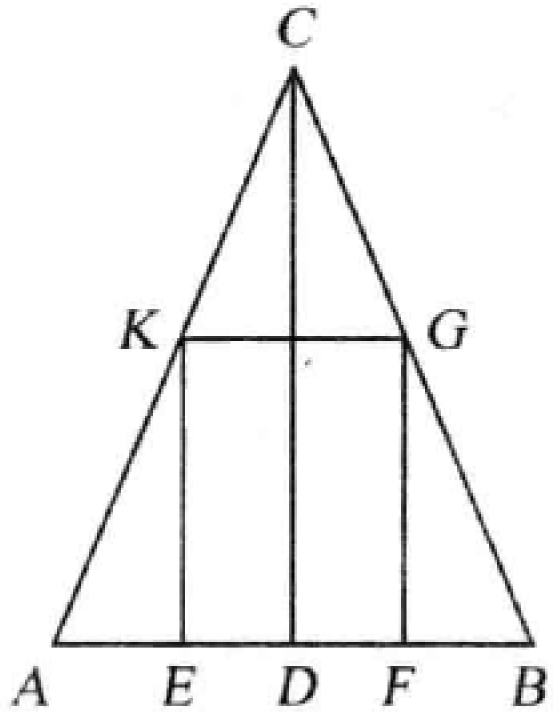
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda y=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2=R^2.\end{cases}$$

有 $$x=y=z=\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

由于在边界上(即 $x\to+0$ 或 $y\to+0$ 或 $z\to+0$ 时),显然 $V\to 0$,故当直角平行六面体的长、宽、高为$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$,$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ 及$\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ 时,其体积最大.

【3695】 如何在给定的直圆锥中嵌入具最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设直圆锥的底面半径为 R,高为 H,且长方体的一个面与直圆锥的底面重合,两个边长为 $2x$ 和 $2y$,四个顶点在直圆锥面上,高为 z,过直圆锥的高和长方体底面的对角线作一截面,如 3695 题图所示.



3695 题图

则 $CD=H,EK=FG=z,AD=R,DE=\sqrt{x^2+y^2}$,$(H-z)R$

$= H \cdot \sqrt{x^2+y^2}$，其中R，H为常数，考虑函数$V = 4xyz$在上述条件下的极值($x>0, y>0, z>0$)．不妨略去常数4，设

$$F = xyz - \lambda[H\sqrt{x^2+y^2} - (H-z)R],$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz - \dfrac{\lambda Hx}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz - \dfrac{\lambda Hy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy - \lambda R = 0, & ③ \\ (H-z)R = H\sqrt{x^2+y^2}. & ④ \end{cases}$$

由①、②得$x = y$，代入③，有$x = y = \sqrt{\lambda R}$，又由①可知$z = \dfrac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}$，把$x, y, z$代入④得

$$H - \frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}} = \frac{H}{R}\sqrt{2\lambda R}.$$

解之有 $\lambda = \dfrac{2}{9}R$，从而有

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}R, z = \frac{1}{3}H, V = \frac{\sqrt{2}}{36}R^2H.$$

显然，在所讨论区域的边界上(即$x \to +0$或$y \to +0$或$z \to +0$)有$V \to 0$，于是当直角平行六面体的高等于$\dfrac{1}{3}$圆锥的高时，其体积最大．

【3696】 如何在椭球$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$中嵌入具最大体积的直角平行六面体．

解 此直角平行六面体的对称中心为原点．设其一个顶点为(x, y, z)，则由题意，考虑函数$V = 8xyz$在条件$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$($x>0, y>0, z>0$)下的极值．不妨略去常数8．设

$$F = xyz - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda \cdot \dfrac{x}{a^2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda \cdot \dfrac{y}{b^2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda \cdot \dfrac{z}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

有 $\qquad x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}.$

这时 $\qquad V = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \cdot abc > 0.$

现讨论边界情形，当 $x \to a-0, y \to b-0, z \to c-0$ 中任一个成立时，则另两个变量皆趋于零. 总之，在边界上，恒有 $V \to 0$. 于是，具有最大体积的直角平行六面体的长、宽、高分别为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2b}{\sqrt{3}}, \dfrac{2c}{\sqrt{3}}$.

【3697】 如何在其母线 l 与底平面呈 α 角的直圆锥中嵌入具最大表面积的矩形平行六面体.

解 设圆锥的底半径为 R，高为 H，则有 $R = l\cos\alpha, H = l\sin\alpha, \dfrac{H}{R} = \tan\alpha$，内接长方体的放置方法与 3695 题相同. 设底面的两边分别为 $2\mathrm{d}\cos\theta, 2\mathrm{d}\sin\theta$，高为 h，则 $0 < \mathrm{d} < R, 0 < h < H$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，且 h, d 由条件 $\dfrac{H-h}{H} = \dfrac{\mathrm{d}}{R}$ 约束，该条件可改写为

$$\mathrm{d} \cdot \tan\alpha + h = H = l\sin\alpha,$$

所求的全表面积为

$$S = 4(\mathrm{d}^2\sin 2\theta + \mathrm{d}h\sin\theta + \mathrm{d}h\cos\theta).$$

(1) 固定 d 和 h,考虑 $S=S(\theta)$ 的变化情况,由一元函数极值求法,易知仅有 $S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,$S(\theta)$ 在$\frac{\pi}{4}$ 处达到最大值 $S=4(\mathrm{d}^2+\sqrt{2}\mathrm{d}h)$,即底面为正方形时,$S$ 才取得最大值. 因此,原问题可化为在条件 $\mathrm{d}\cdot\tan\alpha+h=l\sin\alpha(\mathrm{d}>0,h>0)$ 下,求函数 $S=4(\mathrm{d}^2+\sqrt{2}\mathrm{d}h)$ 的极值.

(2) 边界值情形. 当 $\mathrm{d}\to+0$(此时 $h\to H-0$) 时,显然 $S\to 0$,当 $h\to+0$(这时 $\mathrm{d}\to R-0$) 时,$S\to 4R^2$. 在后一种情形,全表面积退化为上、下两个正方形面积之和.

(3) 在区域内部,设

$$F=4(\mathrm{d}^2+\sqrt{2}\mathrm{d}h)-\lambda(\mathrm{d}\tan\alpha+h-l\sin\alpha),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \mathrm{d}}=8\mathrm{d}+4\sqrt{2}h-\lambda\tan\alpha=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=4\sqrt{2}\mathrm{d}-\lambda=0, & ②\\ \mathrm{d}\cdot\tan\alpha+h=l\sin\alpha. & ③\end{cases}$$

由 ② 有 $\lambda=4\sqrt{2}\mathrm{d}$,代入 ① 得

$$h=(\tan\alpha-\sqrt{2})\mathrm{d}, \qquad ④$$

由 $h>0,\mathrm{d}>0$ 知,当 $\tan\alpha\leqslant\sqrt{2}$ 时,方程组在所研究的区域内无解. 此时,S 的最大值必在边界上达到,即在 $h\to+0$ 时达到 $4R^2$. 当 $\tan\alpha>\sqrt{2}$ 时,将 ④ 式代入 ③ 式有

$$\mathrm{d}=\frac{l\sin\alpha}{2\tan\alpha-\sqrt{2}},h=l\sin\alpha\cdot\frac{\tan\alpha-\sqrt{2}}{2\tan\alpha-\sqrt{2}}.$$

此时 $$S=4(\mathrm{d}^2+\sqrt{2}\mathrm{d}h)=\frac{2l^2\sin^2\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}=\frac{2R^2\tan^2\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}.$$

由于$(\tan\alpha-\sqrt{2})^2=\tan^2\alpha-2(\sqrt{2}\tan\alpha-1)>0$,

于是 $\dfrac{\tan^2\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha-1}>2$. 从而,$S>4R^2$,即在该点的值大于边界

上的值，因此，它为最大值. 于是，当 $\tan\alpha > \sqrt{2}$，长方体底面为正方形，边长为 $2d\sin\frac{\pi}{4} = \frac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha - 1}$，高 $h = l\sin\alpha \cdot \frac{\tan\alpha - \sqrt{2}}{2\tan\alpha - \sqrt{2}}$ 时，全表面积为最大.

【3698】 如何在椭圆抛物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$，$z = c$ 的一段中嵌入具最大体积的直角平行六面体.

解 设长方体的长、宽、高为 $2x$，$2y$ 及 $h = c - z$，考虑函数 $V = 4xyh = 4yx(c - z)$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ $(x > 0, y > 0, 0 < z < c)$ 下的极值. 不妨略去常数 4. 令

$$F = xy(c - z) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y(c - z) - 2\lambda \cdot \frac{x}{a^2} = 0, & ① \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x(c - z) - 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2}, & ② \\ \frac{\partial F}{\partial z} = - xy + \frac{\lambda}{c}, & ③ \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}. & ④ \end{cases}$$

把 ①，②，③ 三式分别乘以 x，y，$(c - z)$，比较有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c - z}{2c}.$$

代入 ④ 式得

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}$$

$$h = c - z = \frac{c}{2}.$$

由于边界上 V 趋于零，故长方体的最大值必在区域内达到.

于是，当平行六面体的尺寸为 a，b 及 $\frac{c}{2}$ 时，其体积最大.

【3699】 求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

解 由题意，问题转化为求函数

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

在条件

$$Ax+By+cz+D=0,$$

下的极值. 设

$$F(x,y,z)=r^2+\lambda(Ax+By+Cz+D),$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-x_0)+\lambda A=0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-y_0)+\lambda B=0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2(z-z_0)+\lambda C=0, & ③ \\ Ax+By+Cz+D=0. & ④\end{cases}$$

由 ①，②，③ 有

$$x=x_0-\frac{1}{2}\lambda A, y=y_0-\frac{1}{2}\lambda B,$$

$$z=z_0-\frac{1}{2}\lambda C. \quad ⑤$$

代入 ④ 有

$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \quad ⑥$$

把 ⑤，⑥ 代入

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

有
$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

当 x，y，z 中有任一个趋于无穷时，r 趋于无穷. 因此，在区域内 r 必取最小值.

于是，点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最

短距离为

$$r=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

【3700】 求下列空间两直线之间的最短距离：

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

和 $$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

解 当两直线不平行时，直线上一点趋于无穷远处时，与另一直线上各点的距离，都趋于无穷. 因此，不平行两直线的最短距离必在有限处达到.

令

$$\vec{r_1}(t)=\vec{l_1}t+\vec{r_{10}},$$

分别表示直线

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad ①$$

$$\vec{r_2}(s)=\vec{l_2}s+\vec{r_{20}},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \qquad ②$$

其中 t,s 为参数

$$\vec{l}_1=\{m_1,n_1,p_1\},\vec{l}_2=\{m_2,n_2,p_2\},$$

$$\vec{r}_{10}=\{x_1,y_1,z_1\},\vec{r}_{20}=\{x_2,y_2,z_2\}.$$

又记 $\vec{r}_0=\vec{r}_{10}-\vec{r}_{20}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}$,

始端在直线 ② 上，终端在直线 ① 上的向量为

$$\vec{u}(t,s)=(\vec{l}_1t+\vec{r}_{10})-(\vec{l}_2s+\vec{r}_{20})=\vec{l}_1t-\vec{l}_2s+\vec{r}_0. \qquad ③$$

由题意，即要求 $|\vec{u}(t,s)|$ 的最小值，它必在有限的 t,s 上取得. 令 $w=|\vec{u}(t,s)|^2=|\vec{l}_1t-\vec{l}_2s+\vec{r}_0|^2$

$$=l_1^2t^2+l_2^2s^2+r_0^2-2(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)st$$

$$+2(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)t\vec{r}_0s-2(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)s,$$

其中 $l_1^2=\vec{l}_1\cdot\vec{l}_1,l_2^2=\vec{l}_2\cdot\vec{l}_2,r_0^2=\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0.$

w 取极值的必要条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=2[l_1^2 t-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)s+(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)]=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}=2[l_2^2 s-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)t-(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)]=0.\end{cases}$$

解之得唯一驻点 (t_0,s_0)，

$$t_0=-\frac{l_2^2(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)}{l_1^2 l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2},$$

$$s_0=\frac{l_1^2(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)}{l_1^2 l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2}.$$

于是 $|\vec{u}(t_0,s_0)|$ 即为所求的最短距离，下面计算 $|\vec{u}(t_0,s_0)|$. 令

$$A=\sqrt{l_1^2 l_2^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2},$$

显然有

$$\begin{aligned}A^2&=|\vec{l}_1|^2\cdot|\vec{l}_2|^2-[|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|\cos(\vec{l}_1,\vec{l}_2)]^2\\&=|\vec{l}_1|^2\cdot|\vec{l}_2|^2\sin^2(\vec{l}_1,\vec{l}_2)=|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|^2,\end{aligned}$$

即

$$A=|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|.$$

把 t_0,s_0 代入 ③ 式有

$$\begin{aligned}\vec{u}(t_0,s_0)=&-\frac{1}{A^2}(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)[l_2^2\vec{l}_1-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)\vec{l}_2]\\&-\frac{1}{A^2}(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)[l_1^2\vec{l}_2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)\vec{l}_1]+\vec{r}_0,\end{aligned}$$

经计算有

$$\begin{aligned}&\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{l}_1\\&=-\frac{1}{A^2}(\vec{l}_1\cdot\vec{r}_0)[l_2^2 l_1^2-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)^2]\\&\quad-\frac{1}{A^2}\cdot(\vec{l}_2\cdot\vec{r}_0)[l_1^2(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)-(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)l_1^2]+(\vec{r}_0\cdot\vec{l}_1)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{l}_2=0.$$

因此

$$\vec{u}(t_0,s_0)\parallel\vec{l}_1\times\vec{l}_2.$$

令 $\vec{n}_0=\dfrac{\vec{l}_1\times\vec{l}_2}{A}$,

则 $\qquad |\vec{n}_0| = 1,$

$$|\vec{u}(t_0,s_0)| = |\vec{u}(t_0,s_0)\cdot\vec{n}_0| = \frac{|\vec{r}_0\cdot(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)|}{A}$$

$$=\pm\frac{1}{A}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix},$$

其中 $\qquad A = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}.$

且正负号的选取,保证所得结果为正值.

【3701】 求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

解 设 (x_1,y_1) 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点,(x_2,y_2) 为直线 $x-y-2=0$ 上的任一点,由题意,问题为求函数

$$r^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2,$$

在条件下 $y_1 - x_1^2 = 0, x_2 - y_2 - 2 = 0$ 下的极值,显然,由几何知:当两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 至少有一伸向无穷时,r 也必趋于无穷大,故 r 的最小值必在有限处达到.设

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2) = r^2 + \lambda_1(y_1 - x_1^2) + \lambda_2(x_2 - y_2 - 2),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -2(x_2-x_1) - 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2-x_1) + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1} = -2(y_2-y_1) + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2} = 2(y_2-y_1) - \lambda_2 = 0, \\ y_2 = x_1^2, \\ x_2 - y_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

有唯一的一组解 $x_1 = \dfrac{1}{2}, y_1 = \dfrac{1}{4}, x_2 = \dfrac{11}{8}, y_2 = -\dfrac{5}{8}$. 于是,所求

的最短距离为

$$r_0=\sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

【3702】 求有心二次曲线的半轴：$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$.

解 设(x_0,y_0)为二次曲线$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$上的点，则$(-x_0,-y_0)$也为该曲线上的点. 因此，原点$(0,0)$即为曲线的中心. 由题意，问题为求函数$u=x^2+y^2$在条件$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$下的极值，设

$$F=x^2+y^2-\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda By=0,\\-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Bx+(\lambda C-1)y=0,\\Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.\end{cases}$$

要方程组有非零解，λ必须满足二次方程

$$\begin{vmatrix}\lambda A-1 & \lambda B\\ \lambda B & \lambda C-1\end{vmatrix}=0, \qquad ①$$

由题设知二次曲线为有心的，因此$AC^2-B^2\neq 0$，由方程①可求得两根λ_1和$\lambda_2(\lambda_1\geqslant\lambda_2)$. 将$\lambda$的值代入方程组，求得对应于$\lambda_1$的解$(x_1,y_1)$和对应于$\lambda_2$的解$(x_2,y_2)$，相应地有

$$\begin{aligned}u(x_1,y_1)&=x_1^2+y_1^2\\&=x_1(\lambda_1(Ax_1+By_1))+y_1(\lambda_1(Bx_1+Cy_1))\\&=\lambda_1(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2)=\lambda_1.\end{aligned}$$

同理 $u(x_2,y_2)=x_2^2+y_2^2=\lambda_2.$

1° 当$AC-B^2>0$且$A+C>0$(或$A>0$)时，由①解得

$$\lambda_{1,2}=\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2(AC-B^2)}>0,$$

即有$\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$，于是$u$的最大值，最小值必在区域内达到，因此，$\lambda_1$和$\lambda_2$分别为$u$的最大值及最小值. 此时，所对应的曲线为椭圆，长、短半

轴的平方分别为 λ_1 及 λ_2，当 $\lambda_1=\lambda_2(A=C,B=0)$ 时为圆.

当 $A+C<0$(或 $A<0$) 时，两根 λ_1,λ_2 皆为负，相应曲线无轨迹.

2° 当 $AC-B^2<0$ 时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$，此时只有一个极值 λ_1，对应的曲线为双曲线. λ_1 为实半轴的平方，其中特别是 $B=0$ 时，曲线退化为一对相交直线.

【3703】 求有心二次曲面的半轴：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.$$

解 由上题知，曲面的中心为(0,0,0). 由题意，达到曲面半轴的点 (x,y,z) 一定是函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1,$$

下的驻点. 设

$$F=u-\lambda(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz-1).$$

解方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=(\lambda A-1)x+\lambda Dy+\lambda Fz=0,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda Dx+(\lambda B-1)y+\lambda Ez=0,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=\lambda Fx+\lambda Ey+(\lambda C-1)z=0,\\ Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.\end{cases}$$

上述方程组要有非零解，λ 必须满足三次方程

$$\begin{vmatrix}\lambda A-1 & \lambda D & \lambda F\\ \lambda D & \lambda B-1 & \lambda E\\ \lambda F & \lambda E & \lambda C-1\end{vmatrix}=0.$$

设三根为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3$，对应于此三根求出满足方程的驻点，和3702题相同，在这些驻点处 $u(x,y,z)$ 的值恰为 $\lambda_i(i=1,2,3)$. 即 λ_i 为曲面半轴的平方，与二次曲线的情况类似. 根据 λ_i 的正负可讨论曲面半轴的虚、实等问题.

【3704】 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与平面 $Ax+By+Cz=0$ 相交形成的椭圆的面积.

解 只要确定所得椭圆的长短半轴 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$，即可由公式 $S = \pi \bar{a}\bar{b}$ 求得椭圆的面积.

原点(0,0,0)在原椭圆柱面的中心轴上，且截平面 $Ax+By+Cz=0$ 又通过它. 因此，原点是截线椭圆的中心，从而长短半轴 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的平方 $\bar{a}^2, \bar{b}^2$ 分别为函数 $u = x^2+y^2+z^2$ 在条件

$$Ax+By+Cz=0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

下的最大值和最小值，设

$$F = u + 2\lambda(Ax+By+Cz) - \mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x} = \left(1-\dfrac{\mu}{a^2}\right)x + \lambda A = 0, & ① \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y} = \left(1-\dfrac{\mu}{b^2}\right)y + \lambda B = 0, & ② \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z} = z + \lambda C = 0, & ③ \\ Ax+By+Cz = 0, & ④ \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1. & ⑤ \end{cases}$$

把①,②,③三式分别乘以 x,y,z 后，然后相加，有 $x^2+y^2+z^2=\mu$. 即从方程组可得 $u(x,y,z)=\mu$，由①,②,③,④知，若要 x,y,z 和 λ 不全为零，μ 必须满足下列方程(同时，μ 只要满足下列方程，驻点 (x,y,z) 也一定有解)

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A \\ 0 & 1-\dfrac{\mu}{b^2} & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

展开后有

$$\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2 - \left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu + (A^2+B^2+C^2) = 0.$$

此方程有两正根，显然即为最大值和最小值 $\bar{a}^2,\bar{b}^2$，由韦达定理有

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2}$$

于是椭圆面积

$$\pi\bar{a}\,\bar{b}=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|},(C\neq 0).$$

当 $C=0$ 时，平面 $Ax+By=0$ 过 Oz 轴，显然得不到椭圆截面.

【3705】 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

与平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$,

相截所得的面积(其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$).

解 截面为一椭圆，与3704题一样，我们只要考虑 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0,$$

和
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

下的极值($a>0,b>0.c>0$). 设

$$F=u+2\lambda_1(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\dfrac{\lambda_2}{a^2}\right)x+\lambda_1\cos\alpha=0, & ①\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\dfrac{\lambda_2}{b^2}\right)y+\lambda_1\cos\beta=0, & ②\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial z}=\left(1-\dfrac{\lambda_2}{c^2}\right)z+\lambda_1\cos\gamma=0, & ③\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0, & ④\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. & ⑤\end{cases}$$

把 ①,②,③ 三式分别乘以 x,y,z,然后相加,有

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda_2$$

由 ①,②,③,④ 知,若要 x,y,z 和 λ_1 不全为零,λ_2 必须满足下列方程

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1-\frac{\lambda_2}{b^2} & 0 & \cos\beta \\ 0 & 0 & 1-\frac{\lambda_2}{c^2} & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

展开整理有

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\lambda_2^2$$

$$- \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{c^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)\lambda_2$$

$+1 = 0$,

此方程有两正根,显然即为椭圆的长短半轴的平方 $\bar{a}^2,\bar{b}^2$. 由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}.$$

于是,椭圆的面积为

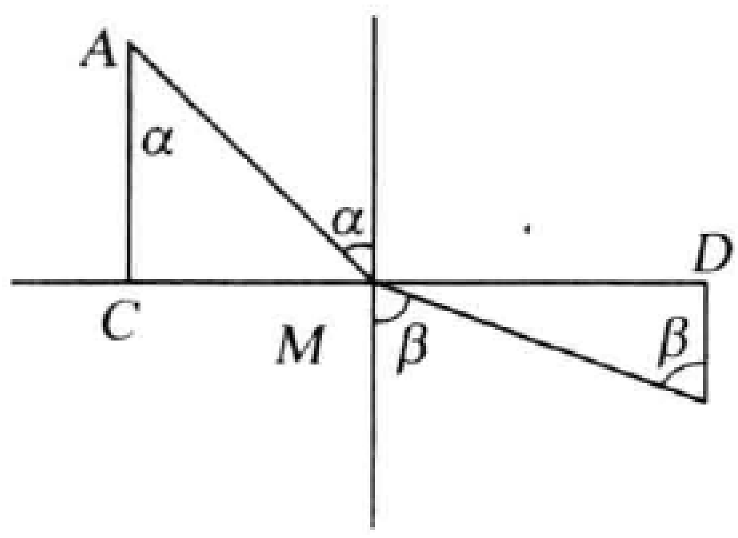
$$S = \pi\bar{a}\,\bar{b} = \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}}.$$

【3706】 根据费马原则,光线从 A 点射出至 B 点,是沿着需要最短时间的曲线传播的.

假定 A 点和 B 点位于由平面分开的不同光学介质中,并且光的传播速度在第一种介质中等于 v_1,而在第二种介质中等于 v_2,请推导光的折射定律.

解　如3706题图所示，光线从 A 点射出，沿着折线 AMB 到达 B 点，由 A、B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD，并与直线 l 交于 C 点及 D 点，设 $AC=a$，$BD=b$，$CD=d$，选择角度 α，β 为变量，则

$$AM=\frac{a}{\cos\alpha},BM=\frac{b}{\cos\beta},$$
$$CM=a\tan\alpha,MD=b\tan\beta.$$



3706 题图

于是问题转为求函数

$$f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta},$$

在条件 $a\tan\alpha+b\tan\beta=d$ 下的最小值，其中 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$(当 M 在 C 与 D 之间时，$\alpha>0$，$\beta>0$，当 M 在 C 点的左边时，$\alpha<0$，$\beta>0$，当 M 在点 D 的右边时，$\alpha>0$，$\beta<0$)，$f(\alpha,\beta)$ 显然是连续函数，又当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 时，这时点 M 从右边伸向无穷远，$\beta\to-\frac{\pi}{2}+0$，显然 $f(\alpha,\beta)\to+\infty$，当 $\alpha\to-\frac{\pi}{2}+0$ 时，这时点 M 从左边伸向无穷远，$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$，显然也有 $f(\alpha,\beta)\to+\infty$，于是 $f(\alpha,\beta)$ 在有限处达到最小值，此处必为驻点. 设

$$F=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}-\lambda(a\tan\alpha+b\tan\beta-\mathrm{d}),$$

又由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial \beta}=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}-\dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta}=0.\end{cases}$$

有
$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\lambda,\frac{\sin\beta}{v_2}=\lambda.$$

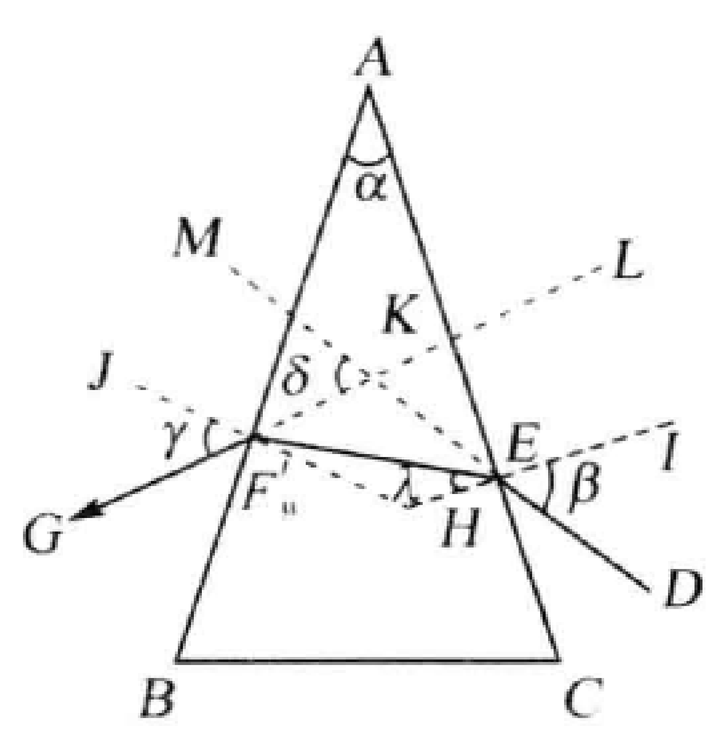
于是驻点处满足

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2},$$

由此可知,光的传播路径必满足上面的关系,这就是著名的光线折射定理,此时,由点 A 到点 B 的光线传播所需要的时间最短.

【3707】 在什么样的入射角下通过折射角为 α 和折射系数为 n 的棱镜时光线的折射(亦即入射线与出射线之间的角度)是最小的?求解这个最小的折射.

解 如 3707 题图所示.



3707 题图

ABC 为棱镜,$\angle BAC=\alpha$ 为棱镜顶角(即棱镜的折射角),DE 为入射光线,折射后从 F 点折射出棱镜,射出线为 FG,IH 和 JH 分别为入射点和射出点的法线,它们相交于 $H(IH\perp AC,JH\perp AB)$. 入射线 DE 的延长线 DM 与射出线反向延长线 FL 交于 K,令 $\angle DEI=\beta,\angle GFJ=\gamma,\angle GKM=\delta,\angle HEF=\lambda,\angle EFH=\mu$.

该题的问题是：当 β 是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 之间的一定范围内变化时，δ 何时达到极小值.

由折射定律(3706 题) 知

$$\sin\beta = n\sin\lambda, \qquad ①$$

$$\sin\gamma = n\sin\mu. \qquad ②$$

由几何关系难求出 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda$ 和 μ 之间的关系：

$$\lambda + \mu = \alpha, \qquad ③$$

$$\delta = \beta + \gamma - \alpha. \qquad ④$$

由于 α 为常数，于是从 ①，②，③，④ 四式中消去 λ,μ 和 γ 得 δ 作为 β 的函数，令

$$F(\beta,\gamma,\lambda,\mu) = \beta + \gamma - \alpha + k_1(\sin\beta - n\sin\lambda) + k_2(n\sin\mu - \sin\gamma) + k_3(\lambda + \mu - \alpha).$$

驻点由下列方程组决定

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 1 + k_1\cos\beta = 0, & ⑤ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \gamma} = 1 - k_2\cos\gamma = 0, & ⑥ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -k_1 n\cos\lambda + k_3 = 0, & ⑦ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = k_2 n\cos\mu + k_3 = 0. & ⑧ \end{cases}$$

由 ⑦，⑧ 消去 k_3，得

$$k_1\cos\lambda = -k_2\cos\mu, \qquad ⑨$$

由 ⑤，⑥ 得

$$k_1 = -\frac{1}{\cos\beta}, k_2 = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

代入 ⑨，两边平方有

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta} = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma},$$

或 $$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-\sin^2\beta}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-\sin^2\gamma}. \tag{10}$$

把 ①,② 代入 ⑩ 有

$$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-n^2\sin^2\lambda}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-n^2\sin^2\mu},$$

整理有

$$(n^2-1)(\sin^2\lambda-\sin^2\mu)=0,$$

由于

$$0<\lambda<\frac{\pi}{2},0<\mu<\frac{\pi}{2},$$

于是 $\sin\lambda=\sin\mu,$

或 $\lambda=\mu.$

代入 ③ 有 $\lambda=\mu=\frac{\alpha}{2}.$

从而 $\beta=\gamma=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right).$

于是 $\delta=\beta+\gamma-\alpha=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$

所求得的 β 即为唯一的驻点,由物理知识,顶角较小的分光棱镜,在区域内确定存在着最小的折射.于是,当入射角

$$\beta=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

时,则 $\delta=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$

应为最小折射,对于作其它用途的各种棱镜,光线的折射路径不仅与顶角有关,而且都与整个棱镜的构造有关,这不属于本题所考虑的对象.

【3708】 变量值 x 和 y 满足线性方程 $y=ax+b$,需要确定它的系数.由于一系列的等精确测量,对于 x 和 y 获得了数值 x_i,$y_i(I=1,2,\cdots\cdots n)$

利用最小二乘法,求系数 a 和 b 的最可靠值.

提示:根据最小二乘法,系数 a 和 b 的最大概率值是:他们的误差平方之和 $\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ 是最小的.

解 由最小二乘法,系数 a 和 b 的最可靠数值是:对于它们,误差的平方和

$$M=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

为最小.因此,上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0.\end{cases}$$

的解来求解.记

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,[x,x]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$[x,1]=\sum_{i=1}^{n}x_i,[y,1]=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases}a[x,x]+b[x,1]=[x,y],\\ a[x,1]+bn=[y,1].\end{cases}$$

系数行列式

$$A=\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i\neq j}x_ix_j=\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2.$$

当 $A\neq 0$ 时,方程组有唯一的一组解,且

$$a=\frac{\begin{vmatrix}[x,y] & [x,1]\\ [y,1] & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2},$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,y]\\ [x,1] & [y,1]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)(\sum_{i=1}^{n}y_i)-(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)(\sum_{i=1}^{n}x_i)}{\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2}.$$

显然,此时 M 为最小,因此,上述 a 和 b 即为所求.

【3709】 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots\cdots,n)$. 直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 的在什么位置可使已知点同这条直线的偏差平方之和是最小的?

解 已知点与直线的偏差平方和

$$M(\alpha,p)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)^2,$$

记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

于是所求直线的参数 α 和 p 应满足方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial\alpha}&=2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)(y_i\cos\alpha-x_i\sin\alpha)\\&=2\sum_{i=1}^{n}\left[x_iy_i\cos2\alpha+(y_i^2-x_i^2)\frac{\sin2\alpha}{2}-y_ip\cos\alpha+x_ip\sin\alpha\right]\\&=n[2\overline{xy}\cos2\alpha+(\overline{y^2}-\overline{x^2})\sin2\alpha-2p(\bar{y}\cos\alpha-\bar{x}\sin\alpha)]\\&=0,\end{aligned}\qquad ①$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial p}&=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)\\&=-2n(\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha-p)=0.\end{aligned}\qquad ②$$

由 ② 式，解得

$$p = \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha. \tag{③}$$

把 ③ 式代入 ① 式，有

$$\tan 2\alpha = \frac{2(\bar{x}\cdot\bar{y} - \overline{xy})}{[\overline{x^2} - (\bar{x})^2][\overline{y^2} - (\bar{y})^2]}. \tag{④}$$

在 $[0,2\pi]$ 范围内，④ 式的解 α 共有四个

$$\alpha_0, \alpha_0 + \frac{\pi}{2}, \alpha_0 + \pi, \alpha_0 + \frac{3\pi}{2},$$

其中 $0 \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$，把这四个解代入 ③ 式可求出 p. 由习惯，取 $p \geqslant 0$，于是上述四个 α 只有两个满足 $p \geqslant 0$ 的要求. 记为 $\alpha_1, p_1, \alpha_2, p_2$ 这样就得到两条互相垂直的直线：

$$\begin{cases} x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0, & ⑤ \\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0. & ⑥ \end{cases}$$

显然，$M(\alpha, p)$ 一定在 p 为有限值的点上取得最小值. 因此，只要比较 $M(\alpha_1, p_1)$ 和 $M(\alpha_2, p_2)$ 的值，M 较小的那条直线即为所求.

【3710】 在区间 $(1,3)$ 用线性函数 $ax + b$ 近似地代替函数 x^2，使得绝对偏差

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \qquad (1 \leqslant x \leqslant 3).$$

是最小的.

解 考察函数

$$u(a,b) = \Delta^2 = \sup_{1\leqslant x\leqslant 3}[x^2 - (ax+b)]^2,$$

$$f(x,a,b) = x^2 - (ax + b).$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - a$，

于是当固定 a, b 时，$f(x,a,b)$ 只在 $x = \frac{a}{2}$ 处达到极值 $f\left(\frac{a}{2}, a, b\right)$. 当限制 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 时，只有当 $2 < a < 6$ 时，$f(x,a,b)$

才可能在 $1 < x < 3$ 内部达到极值. 于是

$$
u(a,b) = \begin{cases} \max\left\{ f^2(1,a,b), f^2(3,a,b), f^2\left(\dfrac{a}{2},a,b\right) \right\}, & 2 < a < 6, \\ \max\{ f^2(1,a,b), f^2(3,a,b) \}, & a \leqslant 2 \text{ 或 } a \geqslant 6. \end{cases}
$$

从上式知,对一切 (a,b) 皆有 $u(a,b) > 0$.

设从上式已解出平面区域 Ω_1,Ω_2 和 Ω_3,使得

$$
u(a,b) = \begin{cases} f^2(1,a,b) = (1-a-b)^2, & (a,b) \in \Omega_1, \\ f^2(3,a,b) = (9-3a-b)^2, & (a,b) \in \Omega_2 \\ f^2\left(\dfrac{a}{2},a,b\right) = \left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)^2, & (a,b) \in \Omega_3, \\ 2 < a < 6. \end{cases}
$$

因 $u(a,b) > 0$,易知 $u(a,b)$ 在区域 $\Omega_i (i = 1,2,3)$ 内部皆无驻点. 再看区域边界的状况,以 Ω_1 和 Ω_3 的边界为例,由 $u(a,b)$ 的连续性,知在边界上有 $u(a,b) = (1-a-b)^2$,且满足条件

$$
(1-a-b)^2 = \left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2.
$$

下面求满足条件极值的必要条件的点,设

$$
F(a,b) = (1-a-b)^2 + \lambda\left((1-a-b)^2 - \left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2\right),
$$

于是
$$
\frac{\partial F}{\partial a} = -2(1+\lambda)(1-a-b) - \lambda a\left(\frac{a^2}{4}+b\right),
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial b} = -2(1+\lambda)(1-a-b) - 2\lambda\left(\frac{a^2}{4}+b\right).
$$

易验证没有满足 $\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0, \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ 的点,其中

$$
1-a-b \neq 0, \frac{a^2}{4}+b \neq 0.
$$

同理,有 Ω_1,Ω_2 和 Ω_2,Ω_3 的边界上也没有驻点,因此,只能在 Ω_1,Ω_2,Ω_3 的边界交点上取得最小值,即在满足方程

$$(1-a-b)^2=(9-3a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2, \qquad ①$$

的点(a,b)上取得最小值,方程①可转化为下面四组方程

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=-\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), & ② \\ 1-a-b=9-3a-b=\dfrac{a^2}{4}+b, & ③ \\ 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), & ④ \\ 1-a-b=-(9-3a-b)=\dfrac{a^2}{4}+b. & ⑤ \end{cases}$$

方程组②无解. 方程组③的解为$a=4,b=-\dfrac{7}{2}$,对应的$\Delta=\dfrac{1}{2}$,方程组④的解为$a=2,b=1$,对应的$\Delta=2$. 方程组⑤的解为$a=6,b=-7$. 对应的$\Delta=2$. 综上所述,在区间$(1,3)$内,用线性函数$4x-\dfrac{7}{2}$来近似地代替函数x^2,即可使绝对偏差Δ为最小,且$\Delta_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

第七章 含参量的积分

§1. 含参量的正常积分

1. 积分的连续性

若函数 $f(x,y)$ 在有界域 $R[a\leqslant x\leqslant A;b\leqslant y\leqslant B]$ 内有定义且是连续的，则

$$F(y)=\int_a^A f(x,y)dx$$

在区间 $b\leqslant y\leqslant B$ 是连续函数.

2. 积分符号下的微分法

若在第 1 条中所指的条件之外，偏导数 $f_y(x,y)$ 在域 R 内是连续的，则当 $b<y<B$ 时，下述**莱布尼茨公式**成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^A f'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

在更普遍的情况下，当积分的限是参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$，而且当 $b<y<B$ 时 $a\leqslant\varphi(y)\leqslant A$，$a\leqslant\psi(y)\leqslant A$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x=f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y)$$

$$+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\mathrm{d}x\quad(b<y<B).$$

3. 积分符号下的积分

在第 1 条的条件下，有：

$$\int_b^B\mathrm{d}y\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^A\mathrm{d}x\int_b^B f(x,y)\mathrm{d}y$$

【3711】 证明：不连续函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

是连续函数. 作出函数 $u = F(y)$ 的图形.

证 当 $-\infty < y < 0$ 时,

$$F(y) = \int_0^1 1 \cdot \mathrm{d}x = 1.$$

当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时,

$$F(y) = \int_0^y (-1)\mathrm{d}x + \int_y^1 1 \cdot \mathrm{d}x = 1 - 2y.$$

当 $1 < y < +\infty$ 时,

$$F(y) = \int_0^1 (-1)\mathrm{d}x = -1.$$

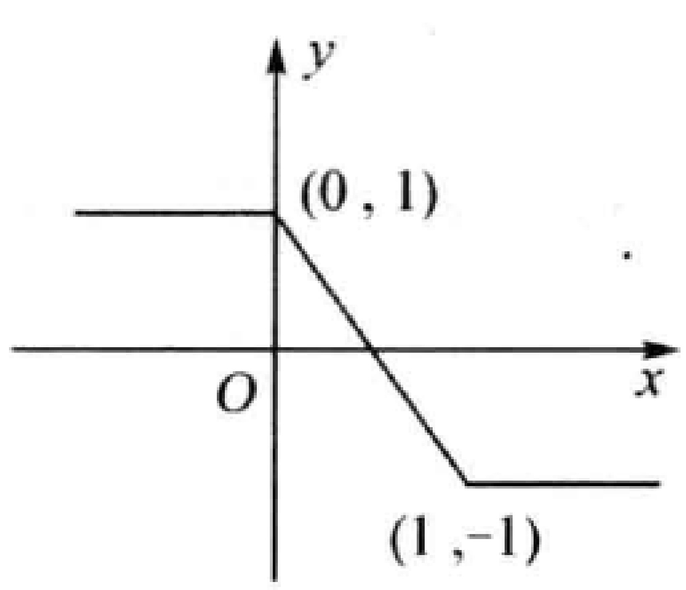
由于 $\lim\limits_{y\to+0} F(y) = \lim\limits_{y\to+0}(1-2y) = 1, \lim\limits_{y\to-0} F(y) = 1$,

且 $\quad F(0) = 1$,

则 $\quad F(+0) = F(-0) = F(0)$.

于是 $u = F(y)$ 在 $y = 0$ 时为连续的.

同理 $u = F(y)$ 在 $y = 1$ 时为连续的,当 $y \neq 0, y \neq 1$ 时,$u = F(y)$ 显然连续,于是 $u = F(y)$ 在整个 Oy 轴上皆为连续的. 如 3711 题图所示.



3711 题图

【3712】 研究下列函数的连续性:

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x$$

其中函数 $f(x)$ 在区间[0,1]是正值连续函数

解 当 $y \neq 0$ 时,被积函数是连续的. 因此,$F(y)$ 为连续函数.

当 $y=0$ 时，显然有 $F(0)=0$.

当 $y>0$ 时，设 m 为 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最小值，则 $m>0$. 由于

$$F(y)\geqslant m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y},$$

$$\lim_{y\to+0}\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

于是有 $$\lim_{y\to+0}F(y)\geqslant\frac{m\pi}{2}>0,$$

故 $F(y)$ 当 $y=0$ 时不连续.

【3713】 求解：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$；(3) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$；

(2) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解 (1) 因为$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，α，$1+\alpha$ 都是连续函数，故含参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2},$$

是 α 在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，因此

$$\lim_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 同理

$$F(\alpha)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x,$$

是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，因此

$$\lim_{\alpha\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=1.$$

(3) 易知

$$F(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x,$$

是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,故

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

(4) 考察二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\leqslant x\leqslant1,0<y\leqslant1,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & 0\leqslant x\leqslant1,y=0.\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$,

知 $f(x,y)$ 是 $0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$ 上的连续函数,从而积分 $F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 $0\leqslant y\leqslant1$ 上的连续函数,因此

$$\lim_{y\to+0}F(y)=F(0).$$

从而更有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{1}{n}\right)=F(0)$$

$$=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\bigg|_0^1=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

【3713.1】 求 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

解 任给 $\varepsilon>0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant\varepsilon+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\mathrm{e}^{-R\sin\varepsilon},$$

于是 $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\leqslant\varepsilon.$

由 ε 的任意性有

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta = 0.$$

又 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \geqslant 0,$$

所以 $$0 \leqslant \underline{\lim_{R\to+\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \leqslant \overline{\lim_{R\to+\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta = 0.$$

故 $$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta = 0.$$

【3714】　设函数 $f(x)$ 在区间 $[A,B]$ 是连续的，证明：

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = f(x)-f(a)$$

$$(A < a < x < B).$$

解　因为 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，于是在 $[A,B]$ 上存在原函数，从而 $$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt$$

$$= \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)]$$

$$= \lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \lim_{h\to+0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$= F'(x)-F'(a) = f(x)-f(a).$$

【3714.1】　设：(1) 在区间 $[-1,1]\varphi_n(x) \geqslant 0$，$(n=1,2,\cdots)$；(2) 当 $n\to\infty$ 时，在区间 $0 < \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1\varphi_n(x)\rightrightarrows 0$；(3) 当 $n\to\infty$ 时，$\int_{-1}^1 \varphi_n(x)dx \to 1$.

证明：若 $f(x)\in C[-1,1]$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f(x)\varphi_n(x)dx = f(0).$$

证　任给 $\varepsilon > 0$，　存在 $\delta > 0$，当 $|x| < \delta$ 时，有

$$|f(x)-f(0)| < \varepsilon.$$

于是 $$\left|\int_{-1}^1 f(x)\varphi_n(x)dx - \int_{-1}^1 f(0)\varphi_n(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_{-1}^1 |f(x)-f(0)|\varphi_n(x)dx$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} \varepsilon\varphi_n(x)\mathrm{d}x, \qquad (n \text{ 充分大时}).$$

从而 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(0)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\varepsilon\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \varepsilon.$$

由 ε 的任意性有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(0)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right| = 0.$$

于是有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(0)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right| = 0.$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x) - \int_{-1}^{1} f(0)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f(0)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(0).$$

【3715】 下式中能否在积分号下取极限?

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{y^2}}\mathrm{d}x?$$

解 不能,事实上

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

而 $$\int_0^1\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x = 0.$$

【3716】 当 $y = 0$ 时能否按照莱布尼茨公式计算函数 $F(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$ 的导数?

解 不能,事实上,当 $y \neq 0$ 时

$$F(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$= \ln\sqrt{1+y^2} - \int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) dx$$

$$= \ln\sqrt{1+y^2} - 1 + y\arctan\frac{1}{y}.$$

而 $$F(0) = \int_0^1 \ln x dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = -1,$$

于是 $$F'_+(0) = \lim_{y\to+0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$= \lim_{y\to+0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y} + \arctan\frac{1}{y}\right] = \frac{\pi}{2},$$

$$F'_-(0) = \lim_{y\to-0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$= \lim_{y\to-0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y} + \arctan\frac{1}{y}\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

故 $F'(0)$ 不存在,另一方面,当 $x > 0$ 时

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0} = \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0} \equiv 0.$$

从而

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0} dx = 0.$$

由此可知,当 $y = 0$ 时不能在积分号下求导数.

【3717】 若 $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$,求 $F'(x)$.

解 $$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2)\cdot e^{-xy^2}\Big|_{y=x^2} - \frac{d}{dx}e^{-xy^2}\Big|_{y=x}$$

$$+ \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2}) dy$$

$$= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy.$$

【3718】 若:

(1) $F(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x} dx$

(3) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$

(4) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$

(5) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y$

求 $F'(\alpha)$.

解 (1) $F'(\alpha)=-\sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$

$$+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

(2) $$F'(\alpha)=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}+\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha).$$

(3) $$F'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)+\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2).$$

(4) 设 $u=x+\alpha,v=x-\alpha$,

则 $$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(u,v)\mathrm{d}x.$$

于是 $$F'(\alpha)=f(2\alpha,0)+\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x$$

$$-\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)+f'_v(u,v)]\mathrm{d}x$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u,v)\mathrm{d}x$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x-f(x+\alpha,x-\alpha)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x$$

$$-[f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)]$$

$$= f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^{\alpha} f'_u(u,v)\mathrm{d}x.$$

(5) $$F'(\alpha) = 2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^{\alpha^2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= 2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^{\alpha^2}\{\sin[x^2+(x+\alpha)^2-\alpha^2]$$

$$-\sin[x^2+(x-\alpha)^2-\alpha^2]\cdot(-1)$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x$$

$$= 2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^{\alpha^2}\{\sin(2x^2+2\alpha x)+\sin(2x^2-2\alpha x)$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x$$

$$= 2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,\mathrm{d}x$$

$$-2\alpha\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(y^2+x^2-\alpha^2)\mathrm{d}y.$$

【3719】 若 $F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\mathrm{d}y$，求 $F''(x)$. 其中 $f(x)$ 为可微函数.

解 $F'(x) = 2xf(x)+\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$,

$$F''(x) = 2f(x)+2xf'(x)+f(x) = 3f(x)+2xf'(x).$$

【3720】 若 $F(x)=\int_a^b f(y)\,|\,x-y\,|\,\mathrm{d}y$，求 $F''(x)$. 其中 $a<b$，$f(y)$ 为 $[a,b]$ 区间的可微函数.

解 $x\in(a,b)$ 时，由

$$F(x)=\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b (y-x)f(y)\mathrm{d}y,$$

有 $$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x (y-x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]\mathrm{d}y-\int_b^x \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_b^x f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

当 $x\notin(a,b)$ 时,如 $x\leqslant a$,则

$$F(x)=\int_a^b (y-x)f(y)\mathrm{d}y.$$

于是 $$F'(x)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=0.$$

同理 $x\geqslant b$ 时,有 $F''(x)=0$,综上所述

$$F''(x)=\begin{cases}2f(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$$

【3721】 若 $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\mathrm{d}\eta(h>0)$,求 $F''(x)$. 其中 $f(y)$ 为连续函数.

解 $$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)\mathrm{d}u$$

于是 $$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h [f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\int_{x+h}^{x+2h} f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{x+h} f(u)\mathrm{d}u\right],$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)]$$

$$= \frac{1}{h^2}[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)].$$

【3722】 若 $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$，求 $F^{(n)}(x)$.

解 $F'(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}[f(t)(x-t)^{n-1}]\mathrm{d}t$

$$= (n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}\mathrm{d}t,$$

$$F''(x) = (n-1)(n-2)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-3}\mathrm{d}t,$$

$\cdots$

$$F^{(n-1)}(x) = (n-1)!\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

于是　$F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$.

【3722.1】 证明公式：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}y \qquad (n=1,2,\cdots), \qquad ①$$

利用公式 ①，得出估值不等式：

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{当 } x \in (-\infty, +\infty).$$

证 当 $n=1$ 时，

$$\text{左边} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

$$\text{右边} = \frac{1}{x^2}\int_0^x y\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}\int_0^x y\mathrm{d}\cos y$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[y\cos y\Big|_0^x - \int_0^x \cos y\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}[x\cos x - \sin x] = \text{左边}.$$

于是，$n=1$ 时命题成立. 现设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)dy,$$

今看 $n=k+1$ 时情形,由

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)dy\right)$$
$$=-\frac{k+1}{x^{k+2}}\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)dy+\frac{1}{x}\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right),$$

又 $$\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}\cos\left(y+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)dy$$
$$=\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}\cos^{(k+1)}(y)dy$$
$$=\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}d\cos^{(k)}(y)$$
$$=\frac{1}{x^{k+2}}\left[y^{k+1}\cos^{(k)}(y)\Big|_0^x-\int_0^x\cos^{(k)}(y)dy^{k+1}\right]$$
$$=\frac{1}{x^{k+2}}\left[x^{k+1}\cos^{(k)}(x)-(k+1)\int_0^x y^k\cos^{(k)}(y)dy\right]$$
$$=\frac{1}{x^{k+2}}\left[x^{k+1}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)-(k+1)\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)dy\right],$$

于是,$n=k+1$ 时命题成立,由归纳原理,对一切自然数 n,皆有

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy.$$

命题证毕.

由 $$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy,$$

有 $$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^x|y|^n dy.$$

从而,当 $x>0$ 时,

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n dy=\frac{1}{x^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

当 $x<0$ 时,

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant-\frac{1}{(-x)^{n+1}}\int_0^x(-y)^n dy=\frac{1}{n+1}.$$

故有 $\left|\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

【3723】 在区间 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$，使得$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2 \mathrm{d}x = \min$.

解 设

$$F(a,b)=\int_1^3 (a+bx-x^2)^2 \mathrm{d}x,$$

于是 $F(a,b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数，且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2} \to +\infty$ 时，$F(a,b) \to +\infty$，从而 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值，解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2\displaystyle\int_1^3 (a+bx-x^2)\mathrm{d}x = 4a+8b-\dfrac{52}{3}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\displaystyle\int_1^3 x(a+bx-x^2)\mathrm{d}x = 8a+\dfrac{52}{3}b-40=0. \end{cases}$$

有 $a=-\dfrac{11}{3}$，$b=4$，于是当 $a=-\dfrac{11}{3}$，$b=4$ 时，$F(a,b)$ 达到最小值，

所求的线性函数为 $4x-\dfrac{11}{3}$.

【3724】 根据函数 $a+bx$ 和 $\sqrt{1+x^2}$ 的均方差在指定区间 $[0,1]$ 是最小的条件，得出近似公式：

$$\sqrt{1+x^2} \approx a+bx \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

解 由题意，问题是在$[0,1]$上求线性函数 $a+bx$，使得

$$\int_0^1 (a+bx-\sqrt{1+x^2})^2 \mathrm{d}x = \min.$$

设

$$F(a,b)=\int_0^1 (a+bx-\sqrt{1+x^2})^2 \mathrm{d}x,$$

则 $F(a,b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数，且易知当 $r=\sqrt{a^2+b^2} \to +\infty$ 时，$F(a,b) \to +\infty$，故 $F(a,b)$ 必在有限处取得最小值，解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2\int_0^1 (a+bx-\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$= 2a + b - [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\int_0^1 x(a + bx - \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$= a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = 0,$$

有 $\qquad a \approx 0.934, \qquad b \approx 0.427.$

于是，当 $a \approx 0.934, b \approx 0.427$ 时，$F(a,b)$ 为最小值，即所求的近似公式为

$$\sqrt{1+x^2} \approx 0.934 + 0.427x, x \in [0,1].$$

【3725】 求完全椭圆积分：

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

及 $$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (0 < k < 1).$$

的导数，并用函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示.

证明：$E(k)$ 满足微分方程：

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

解 $$E'(k) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2\sin^2\varphi) - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

$$= \frac{E(k) - F(k)}{k}, \qquad ①$$

$$F'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2\sin^2\varphi) - 1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

易知　$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$

$$=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}].$$

于是有　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi.$

从而　$$F'(k)=-\frac{F(k)}{k}+\frac{E(k)}{k(1-k^2)}. \quad ②$$

由 ① 式，对 k 再求导数，注意到 ② 有

$$E''(k)=\frac{[E'(k)-F'(k)]k-[E(k)-F(k)]}{k^2}$$

$$=\frac{\left[\frac{E(k)-F(k)}{k}+\frac{F(k)}{k}-\frac{E(k)}{k(1-k^2)}\right]k-kE'(k)}{k^2}$$

$$=-\frac{E(k)}{1-k^2}-\frac{E'(k)}{k}.$$

即　$$E''(k)+\frac{E'(k)}{k}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

【3726】　证明：整数角标 n 的贝塞尔函数：

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$$

满足贝塞尔方程：

$$x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

证　$J'_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi,$

$$J''_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi.$$

于是　$x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(x^2\sin^2\varphi+n^2-x^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$$

$$-x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)]\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(n^2 - x^2\cos^2\varphi)\cos(n\varphi - x\sin\varphi)$$

$$-x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)]\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{\pi}(n + x\cos\varphi)\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

证毕.

【3727】 设

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}}$$

其中函数 $\varphi(x)$ 与其导数一起在区间 $0 \leqslant x \leqslant a$ 连续. 证明:当 $0 < \alpha < a$ 时,

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\mathrm{d}x.$$

提示:假设 $x = \alpha t$.

证 当 $x = \alpha$ 时,一般说来被积函数变成无穷,所以我们不能直接在积分号下求导数,设 $x = \alpha t$,则此积分变成以下形式

$$I(\alpha) = \sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1 - t}}\mathrm{d}t.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0,1]$ 上绝对可积,故可利用积分号下求导数的公式,有

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1 - t}}\mathrm{d}t + \sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{t\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1 - t}}\mathrm{d}t.$$

再将 $x = \alpha t$ 代入上式有

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\mathrm{d}x. \quad ①$$

由分部积分法有

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\varphi(0) + \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha - x}\varphi'(x)\mathrm{d}x. \quad ②$$

另一方面,有

$$\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x = -\int_0^\alpha \sqrt{\alpha-x}\varphi'(x)\mathrm{d}x + \alpha\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x. \qquad ③$$

把 ② 式,③ 式代入 ① 式有

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x.$$

【3728】 证明:函数

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y)v(y)\mathrm{d}y$$

满足方程:

$$u''(x) = -v(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

其中 $K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 若\ x \leqslant y, \\ y(1-x), & 若\ x > y. \end{cases}$ 且 $v(y)$ 连续.

证 由

$$u(x) = \int_0^x y(1-x)v(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 x(1-y)v(y)\mathrm{d}y,$$

有

$$u'(x) = x(1-x)v(x) - \int_0^x yv(y)\mathrm{d}y$$

$$- x(1-x)v(x) + \int_x^1 (1-y)v(y)\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^x yv(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)v(y)\mathrm{d}y,$$

$$u''(x) = -xv(x) - (1-x)v(x) = -v(x).$$

所以,函数 $u(x)$ 满足方程

$$u''(x) = -v(x), 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

【3729】 若 $F(x,y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x-yz)f(z)\mathrm{d}z$,

其中 $f(z)$ 为可微分函数,求 $F''_{xy}(x,y)$.

解 $F'_x(x,y) = y(x-xy^2)f(xy) + \int_{\frac{x}{y}}^{xy} f(z)\mathrm{d}z$,

$$F''_{xy}(x,y) = (x-xy^2)f(xy) + y\cdot(-2xy)f(xy)$$

$$+ y(x-xy^2)f'(xy)\cdot x + xf(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= x(2-3y^2)f(xy)+x^2y(1-y^2)f'(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right).$$

【3730】 设 $f(x)$ 为可微分两次函数及 $F(x)$ 为可微分函数. 证明:函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\mathrm{d}z$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

及初始条件 $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=F(x)$.

证
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]$$
$$+\frac{1}{2}F(x+at)+\frac{1}{2}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[a^2f''(x-at)+a^2f''(x+at)]$$
$$+\frac{a}{2}F'(x+at)-\frac{a}{2}F'(x-at). \qquad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]$$
$$+\frac{1}{2a}F(x+at)-\frac{1}{2a}F(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$$
$$+\frac{1}{2a}F'(x+at)-\frac{1}{2a}F'(x-at). \qquad ②$$

比较 ① 和 ② 式有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

又
$$u(x,0)=\frac{1}{2}[f(x-0\cdot a)+f(x+0\cdot a)]$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-0\cdot a}^{x+0\cdot a}F(z)\mathrm{d}z=f(x).$$

$$u'_t(x,0)=\frac{1}{2}[-af'(x)+af'(x)]$$

$$+\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(x)=F(x).$$

【3731】 证明:若函数 $f(x)$ 在$[0,1]$是连续的且当 $0\leqslant\xi\leqslant 1$ 时 $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$,则函数

$$u(x,y,z)=\int_0^l \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}.$$

满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证 由积分号下的求导法则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^l \frac{2(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi}{2[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int_0^l \frac{(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi}{((x-\xi)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[2(x-\xi)^2-y^2-z^2]}{((x-\xi)^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\xi. \qquad ①$$

同理 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)\cdot[-(x-\xi)^2+2y^2-z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\xi, \qquad ②$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int_0^l \frac{f(\xi)[-(x-\xi)^2-y^2+2z^2]}{[(x-\xi)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}\xi. \qquad ③$$

把 ①,②,③ 三式相加,有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

应用对参数的微分法,计算以下积分(3732 ~ 3735).

【3732】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x.$

解 令

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x,$$

1° $a>0,b>0$ 情形,我们有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x,$$

若 $a=b$,有

$$I'(b)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2b},$$

若 $a\neq b$,作代换 $t=\tan x$ 有

$$\begin{aligned}I'(a)&=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\arctan t-\frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a}{b}\arctan\frac{at}{b}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{a+b}.\end{aligned}$$

因此 $\qquad I'(a)=\dfrac{\pi}{a+b},a\in(0,+\infty).$

积分有 $\quad I(a)=\pi\ln(a+b)+c,a\in(0,+\infty),$

其中 c 为某常数,令 $a=b$ 有

$$I(b)=\pi\ln2b+c.$$

而 $\qquad I(b)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln b^2\mathrm{d}x=\pi\ln b,$

代入有 $\quad c=\pi\ln\dfrac{1}{2}.$

于是 $\qquad I(a)=\pi\ln(a+b)+\pi\ln\dfrac{1}{2}=\pi\ln\dfrac{a+b}{2},$

$$a\in(0,+\infty).$$

2° $a<0$ 或 $b<0$,则可化为 $a>0$ 且 $b>0$ 的情形.

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|a|^2\sin^2x+|b|^2\cos^2x)\mathrm{d}x\\&=I(|a|)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.\end{aligned}$$

于是不论 a,b 是正是负,在任何情形,皆有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x = \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

【3733】 $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$.

解 令

$$I(a) = \int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x,$$

当 $|a|<1$ 时，由于

$$1-2a\cos x+a^2 \geqslant 1-2|a|+a^2 = (1-|a|)^2 > 0,$$

从而 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且具有连续导数，故可在积分号下求导数，求 $I(a)$ 关于 a 的导数有

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+a^2)-2a\cos x} \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x} \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}\text{（2028 题结论）}. \\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

于是当 $|a|<1$ 时，$I(a)=C$（常数），但 $I(0)=0$，于是 $C=0$，从而 $I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时，令 $b=\dfrac{1}{a}$，则 $|b|<1$，且 $I(b)=0$，故有

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)\mathrm{d}x = I(b)-2\pi\ln|b| \\
&= -2\pi\ln|b| = 2\pi\ln|a|.
\end{aligned}$$

当 $|a|=1$ 时，有

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t=2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)$$

(2523 结论).

$$=0.$$

同理 $\quad I(-1)=0.$

综上所述,有

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } |a|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|a|, & \text{当 } |a|>1.\end{cases}$$

【3734】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x.$

解 令

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x,a)\mathrm{d}x,$$

其中 $\quad f(x,a)=\dfrac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}.$

表面上 $f(x,a)$ 在 $x=0$ 和 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 上无定义,但因

$$\lim_{x\to+0}f(x,a)=a,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x,a)=0,$$

于是若补充定义

$$f(0,a)=a,f\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0,$$

则 $f(x,a)$ 为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},-\infty<a<+\infty$ 上连续函数.

又当 $0<x<\dfrac{\pi}{2},-\infty<a<+\infty$ 时,

$$f'_a(x,a)=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{1+a^2\tan^2 x}=\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}.$$

又 $\quad f(0,a)=a, f\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0,$

于是 $\quad f'_a(0,a)=1, f'_a\left(\frac{\pi}{2},a\right)=0,$

由此知 $\quad f'_a(x,a)$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2\tan^2 x}, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, -\infty<a<+\infty,\\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}, -\infty<a<+\infty.\end{cases}$$

显然 $f'_a(x,a)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], a\in(0,+\infty)$ 上连续，在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], a\in(-\infty,0)$ 上也连续，注意，在点 $x=\frac{\pi}{2}, a=0$ 不连续. 于是由积分号下求导数法则有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x},\quad a\in(0,+\infty)\cup(-\infty,0).$$

作变量代换 $\tan x=t$，当 $a^2\neq 1$ 时有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}\\&=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{a^2t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2(1+|a|)}.\end{aligned}$$

若 $a^2=1$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

总之有 $\quad I'(a)=\frac{\pi}{2(1+|a|)}, a\in(0,+\infty)\cup(-\infty,0).$

积分有 $\quad I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C_1, a\in(0,+\infty),$

$$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)+C_2, a\in(-\infty,0),$$

其中 C_1,C_2 是两个常数，由于 $f(x,a)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$a\in(-\infty,+\infty)$ 上连续，故 $I(a)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续，因此

$$\lim_{a\to 0+0}I(a)=\lim_{a\to 0-0}I(a)=I(0),$$

但 $$I(0)=0,\ \lim_{a\to 0+0}I(a)=C_1,\ \lim_{a\to 0-0}I(a)=C_2,$$

于是 $$C_1=C_2=0.$$

从而 $$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|),(-\infty<a<+\infty).$$

【3735】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\qquad(|a|<1).$

解 设

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x},$$

由于 $$\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=\frac{1-a^2\cos^2x}{1-2a\cos x+a^2\cos^2x}\geqslant\frac{1-a^2}{1+2|a|+a^2}$$
$$=\frac{1-a^2}{(1+|a|)^2}>0,$$

于是 $\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$ 为连续函数，又由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+at)-\ln(1-at)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{a}{1+at}-\dfrac{-a}{1-at}}{1}=2a,$$

现补充被积函数在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的值为 $2a$，易知被积函数为连续函数，且它对 a 有连续导数，从而可在积分号下求导数，于是

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+a\cos x}+\frac{1}{1-a\cos x}\right)dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}\right)\right.$$

$$+\arctan\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\frac{x}{2}\right)\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},(2028\text{ 题结论}).$$

故 $\quad I(a)=\pi\arcsin a+C,\ |a|<1.$

又 $\quad I(0)=0,$

于是 $\quad C=0.$

从而 $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\pi\arcsin a,(|a|<1).$

【3736】 利用公式 $\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$

计算积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}.$

由于函数 $1+\frac{1}{x^2y^2}$ 在 $x\in[0,1]$, $y\in[0,1]$ 上连续且 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,在 $[0,1]$ 上绝对可积,于是上述积分号可交换:

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}.\text{①}$$

作变量代换 $x=\cos t$,有

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\cos^2 t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.\qquad\text{②}$$

于是,由 ① 式和 ② 式有

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{\pi\mathrm{d}y}{2\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

【3737】 应用积分号下的积分法,计算积分:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x \qquad (a>0, b>0).$$

解 由于

$$\lim_{x\to+0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x\to 1-0} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} (bx^b - ax^a) = b - a.$$

于是$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x$不是广义积分,且若补充定义被积函数在$x=0$时的值为$0$,$x=1$时的值为$b-a$,则可理解为$[0,1]$上连续函数的积分,由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \mathrm{d}y, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

而函数x^y在$0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant y \leqslant b$上连续,不妨设$a<b$,有

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_a^b x^y \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^1 x^y \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

【3738】 计算积分:

(1) $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x \qquad (a>0, b>0)$.

解 (1) 不妨设$a<b$,

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \int_a^b x^y \mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y \mathrm{d}x,$$

其中,当$x=0$时,$\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$理解为零,从而$\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$在$x$

$\in [0,1]$，$y \in [a,b]$ 上连续，于是可应用积分号下的积分法交换积分次序，作变量代换 $x = e^{-t}$ 有

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx = \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t dt$$

$$= \frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t - \cos t]e^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty}$$

（1829 题结论）.

$$= \frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是有 $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$

$$= \int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2} = \arctan(1+y)\Big|_a^b$$

$$= \arctan(1+b) - \arctan(1+a)$$

$$= \arctan\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}.$$

（2）同 ① 及 1828 题的结论有

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$$

$$= \int_a^b dy\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx = \int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2}dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln[1+(1+y)^2]\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

【3739】 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分（见第 3725 题），证明公式：

（1）$\displaystyle\int_0^k F(k)k dk = E(k) - k_1^2 F(k)$

（2）$\displaystyle\int_0^k E(k)k dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]$

其中 $k_1^2 = 1 - k^2$

解 （1）由 3725 的结论，有

$[E(k) - k_1^2 F(k)]'$

$$= E'(k) + 2kF(k) - (1-k^2)F'(k)$$

$$= \frac{E(k)-F(k)}{k} + 2kF(k)$$

$$-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}\right]$$

$$= kF(k).$$

于是 $$E(k) - k_1^2 F(k) = \int_0^k tF(t)\mathrm{d}t + C,$$

其中 C 为常数，故当 $k=0$ 时，上式左端为

$$E(0) - F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

右端等于 C，故 $C=0$，于是

$$\int_0^k tF(t)\mathrm{d}t = E(k) - k^2 F(k).$$

(2) 由

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]'$$

$$= \frac{1}{3}[2kE(k) + (1+k^2)E'(k)$$

$$+ 2kF(k) - (1-k^2)F'(k)]$$

$$= \frac{1}{3}\Big\{2kE(k) + (1+k^2)\cdot\frac{E(k)-F(k)}{k}$$

$$+ 2kF(k) - (1-k^2)\cdot\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}\right]\Big\}$$

$$= kE(k),$$

有 $$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k^2F(k)] = \int_0^k tE(t)\mathrm{d}t + C.$$

当 $k=0$ 时，有 $C=0$，于是

$$\int_0^k tE(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)].$$

【3740】 证明公式

$$\int_0^x xJ_0(x)\mathrm{d}x = xJ_1(x)$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为脚标 0 和 1 的贝塞尔函数(见第 3726 题).

证 $\int_0^x tJ_0(t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x t\mathrm{d}t\int_0^\pi \cos(-t\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x t\mathrm{d}t\int_0^\pi [\cos(\varphi-t\sin\varphi)\cos\varphi$$

$$+\sin(\varphi-t\sin\varphi)\sin\varphi]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi t\cos(\varphi-t\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi t\sin(\varphi-t\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}(t\sin\varphi)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_0^x t\sin(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}(t\sin\varphi-\varphi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}(t\sin\varphi-\varphi)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_0^x t\mathrm{d}\cos(\varphi-t\sin\varphi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_0^x \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^\pi \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^\pi \cos(\varphi-t\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(t-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=xJ_1(x).$$

上述各式中的被积函数是 t 和 φ 的二元连续函数. 因此,交换积分

顺序是合理的,证毕.

§2. 含参量的广义积分　积分的一致收敛性

1. **一致收敛的定义**　设函数 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$, $y_1<y<y_2$ 域内是连续的广义积分:

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x, \qquad ①$$

称之为在区间(y_1,y_2)为一致收敛的.若对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在数 $B=B(\varepsilon)$,使得当所有 $b\geqslant B$ 时,具有:

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (y_1<y<y_2),$$

积分 ① 的一致收敛等价于以下形式的所有级数的一致收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \qquad ②$$

其中　$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots,$

且　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty.$

若积分 ① 在区间(y_1,y_2)一致收敛,则它在这个区间是参数 y 的连续函数.

2. **柯西准则**　积分 ① 在区间(y_1,y_2)一致收敛的充要条件是对于任意 $\varepsilon>0$,都存在 $B=B(\varepsilon)$,使得只要 $b'>B$ 及 $b''>B$,则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

3. **威尔斯特拉斯准则**　对于积分(1)的一致收敛的充要条件是与参数 y 无关的强函数 $F(x)$ 存在,使得

当 $a\leqslant x<+\infty$ 时 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$ 且 $\int_0^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x<+\infty.$

4. **对于不连续函数的广义积分有类似的定理.**

确定下列积分的收敛域(3741 ～ 3746).

【3741】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$.

解　当 $a\geqslant 0$ 时,

$$\frac{e^{-ax}}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2},x\in(0,+\infty),$$

又

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

于是原积分收敛.

当 $a<0$ 时,原积分发散,于是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$ 的收敛域为 $a\geqslant 0$ 的一切 a 的值.

【3742】 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$.

解　因为

$$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'=\frac{(1-p)x^p+(1-q)x^q}{(x^p+x^q)^2},$$

若 $\max(p,q)>1$,则当 x 充分大时 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'<0$,从而当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^p+x^q}=0.$$

又

$$\left|\int_\pi^A\cos x dx\right|=|\sin A|\leqslant 1,任 A>\pi,$$

于是

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx \text{ 收敛}.$$

若 $\max(p,q)\leqslant 1$,则 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'\geqslant 0$,于是函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x\geqslant\pi$ 上是递增的,对任何正整数 n,有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x}{x^p+x^q}dx$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{\pi^p+\pi^q}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)}=\text{常数}>0.$$

从而不满足柯西收敛准则,因此积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$发散.

【3743】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

解 若$q=0$,则由积分$\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$知,当$p>1$时收敛,而积分$\int_0^A\frac{1}{x^p}dx$,当$p<1$时收敛,故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 1}{x^p}dx$对任$p\in(-\infty,+\infty)$及$q=0$时发散.

若$q\neq0$,则积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^p}dx=\int_0^{+\infty}x^{-p}\sin x^q dx.$$

由2380题的结论知,当$\left|\frac{1-p}{q}\right|<1$时,原积分收敛.

【3744】 $\int_0^2\frac{dx}{|\ln x|^p}$.

解 考察积分

$$\int_0^1\frac{dx}{|\ln x|^p}=\int_0^1\frac{dx}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)}=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

由2362题的结论知:当$-p>-1$或$p<1$时收敛. 对于积分

$$\int_1^2\frac{dx}{|\ln x|^p}=\int_1^2\frac{dx}{\ln^p x}.$$

因为
$$\lim_{x\to1+0}(x-1)^p\cdot\frac{1}{\ln^p x}=\left[\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right]^p=\left[\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^{-1}}\right]^p=1,$$

于是积分$\int_1^2\frac{dx}{\ln^p x}$与积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^p}$具有相同的敛散性. 对于积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^p}$,我们有当$p<1$时收敛,当$p\geqslant1$时发散,故仅当$p<1$时,积分$\int_0^2\frac{dx}{|\ln x|^p}$收敛.

【3745】 $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}\cdot\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$,

由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,对于任意的 n,$\sqrt[n]{1+x}$ 与 $\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}$ 都是单调有界函数,于是原积分与积分 $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}}\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性. 对上述积分作变量代换 $t=\frac{1}{1-x}$ 有

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ 仅当 $\alpha>0$ 时收敛. 事实上,当 $\alpha>0$ 时,显然收敛,当 $\alpha=0$ 时,显然发散,当 $\alpha<0$ 时,令 $\beta=-\alpha(\beta>0)$,则对于正整数 n 有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} t^{\beta}\cos t\mathrm{d}t > (2n\pi)^{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}\to+\infty,\ n\to\infty.$$

于是积分 $\int_1^{+\infty} t^{\beta}\cos t\mathrm{d}t$ 发散. 从而积分 $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 仅当 $2-\frac{1}{n}>0$ 时收敛,即仅当 $n<0$ 或 $n>\frac{1}{2}$ 时收敛.

【3746】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x\ (p>0)$.

解 因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x^p+\sin x} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1}+\frac{\sin x}{x}} = \begin{cases} 1, & p>1, \\ \frac{1}{2}, & p=1, \\ 0, & 0<p<1. \end{cases}$$

于是 $x=0$ 不是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ 的瑕点. 因此，只要讨论积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x(p>0)$ 的敛散性.

由于

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)},$$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>0$ 时收敛，故只要讨论 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 但当 $p>0, x\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\right]=\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\\&\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)}\leqslant\frac{1}{x^p(x^p-1)},\end{aligned}$$

又 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\mathrm{d}x$ 恒收敛($p>0$ 时)，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x^p+1)}$ 当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(x^p-1)}$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散，由此知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x(p>0)$ 仅当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛.

利用与级数比较的方法研究下列积分的收性(3747 ~ 3750).

【3747】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x.$

解 设 $a>0$，下证对任何序列

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots\qquad(a_n\to+\infty),$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 皆收敛. 事实上，

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\left.\frac{\sin x}{x+a}\right|_{a_n}^{a_{n+1}}+\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x.$$

于是 $\quad\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a}-\frac{\sin a_m}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x.$$

从而
$$\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2}$$
$$=\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\left(\frac{1}{a_m+a}-\frac{1}{a_{m+p}+a}\right)$$
$$=\frac{2}{a_m+a},$$

因此，满足柯西收敛准则，从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$收敛. 故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$收敛.

若$a=0$，瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$发散，故广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$发散.

现设$a<0$，若

$$a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,n=0,1,2,\cdots,$$

则
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x+\int_{(n+1)\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t$$

右端第二个积分收敛，又由于

$$\lim_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\cos x}{x+a}=(-1)^{n+1},$$

于是右端第一个积分收敛，它不是广义积分，补充定义被积函数在$x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$时的值为$(-1)^{n+1}$后即为连续函数的积分. 从

而,积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $a<0$ 且

$$a\neq-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n=0,1,2,\cdots,$$

此时 $\cos(-a)\neq 0$. 由连续性,取 $\delta>0$,当 $-a\leqslant x\leqslant -a+\delta$ 时,$\cos x$ 保持定号且 $|\cos x|\geqslant\dfrac{1}{2}|\cos(-a)|$.

于是 $$\left|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|\cdot\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x+a}=+\infty.$$

因此瑕积分$\int_{-a}^{-a+\delta}\dfrac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 发散,从而积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述,积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 仅当$a>0$ 和 $a=-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$($n=0,1,2,\cdots,$) 时收敛.

【3748】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}\quad(n>0)$.

解 因为被积函数非负,于是只要考虑化为正项级数,我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}\\&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}.\end{aligned}$$

又积分 $$\begin{aligned}0&<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}\\&<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{k\pi\mathrm{d}x}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},\end{aligned}$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k-1)\pi\mathrm{d}x}{1+[(k+1)\pi]^n\sin^2 x}$$

$$<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{(k+1)\pi\mathrm{d}x}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x},$$

且 $$\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}=\frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{1+a^2}}\right)\Bigg|_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}},$$

$$\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan(\sqrt{1+a^2}\tan x)\Bigg|_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\sqrt{1+a^2}.$$

又 $\frac{\pi}{4}<\arctan\sqrt{1+a^2}<\frac{\pi}{2}$,

故 $$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}<\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

从而 $$0<\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}<\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}},$$

$$\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}<\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$$

$$<\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}},$$

因为当 $n>4$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 收敛，当 $n\leqslant 4$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$ 当 $n>4$ 时收敛，又级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$ 仅当 $n>4$ 时收敛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}$ 仅当 $n>4$ 时收敛.

【3749】 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 类似于3748,我们有

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(x+n\pi)^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

因此
$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p\pi^p}$$
$$<\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}<\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\pi^p}.$$

易知积分$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$收敛,且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛,当$p\leqslant 1$时发散.因此,原积分仅当$p>1$时收敛.

【3750】 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$.

解 由

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x,$$

我们知道右端第一个积分($x=0$可能是瑕点)当$n<2$时收敛,当$n\geqslant 2$时发散.下面讨论右端第二个积分.

先设$n>-1$,对任何序列

$$1=a_0<a_1<\cdots<a_k<\cdots\qquad(a_k\to+\infty).$$

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\mathrm{d}[\cos(x+x^2)]}{x^n(1+2x)}$$

$$= -\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_k}^{a_{k+1}}$$

$$-\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x,$$

于是 $$\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Bigg|_{a_m}^{a_{m+p}}$$

$$-\int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x.$$

因此 $$\left|\sum_{k=m}^{m+p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2a_m^{n+1}}+\frac{1}{2a_{m+p}^{n+1}}+\int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x.$$

因为 $$\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\cdot\frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}=\frac{n+1}{2}>0,\ n+2>1.$$

故积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

从而任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,对 $p=1,2,3,\cdots$,皆有

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p+1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因而由柯西收敛准则,级数$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛.

现设 $n\leqslant -1$,令 ξ_k 和 η_k 分别表示方程

$$x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ 及 } x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

的正根,其中 $k=1,2,\cdots$,令

$$\xi_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1),$$

$$\eta_k=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+2\pi}-1),$$

于是 $\quad\eta_k>\xi_k\to+\infty,(k\to\infty\text{时}).$

我们有 $\quad\displaystyle\int_{\xi_k}^{\eta_k}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$

$$>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x^{-n}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\xi_k}^{\eta_k}x\,\mathrm{d}x>\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_k-\xi_k)$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1}{\sqrt{1+8k\pi+2\pi}+\sqrt{1+8k\pi+\pi}}$$

$$\to\frac{\pi}{8\sqrt{2}}(k\to\infty).$$

故积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述,积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^n)}{x^n}\mathrm{d}x$仅当$-1<n<2$收敛.

【3751】 从正面表达什么是积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在指定区间(y_1,y_2)内不一致收敛?

解 若对某个正数 ε_0,不论 $B>0$,均存在 $b_0\geqslant B$ 及 $y_0\in(y_1,y_2)$(b_0 与 y_0 皆于 B 有关),使得

$$\left|\int_{b_0}^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间(y_1,y_2)内不一致收敛.

【3752】 证明:若(1) 积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;(2) 函数$\varphi(x,y)$有界并关于 x 单调. 则积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x$(在相应域内)一致收敛.

证 设 $|\varphi(x,y)| \leqslant L$，由条件(1)知，对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $B = B(\varepsilon)$. 当 $A' > A > B$ 时，有不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad ①$$

由积分第二中值定理，存在 $\xi \in [A,A']$，使得

$$\int_A^{A'} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \varphi(A+0,y)\cdot\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + \varphi(A'-0,y)\cdot\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x. \qquad ②$$

由 ① 式，有

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由 ② 式有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\right| < L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

即积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x$ 在对应的 y 域内一致收敛.

【3753】 证明：一致收敛的积分

$$I = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x \qquad (0 < y < 1).$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数.

证 任意的 $\varepsilon > 0$，取 $A_0 > 1$ 充分大，使

$$\int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u < \varepsilon,$$

下证当 $A > A_0$ 时，对一切 $0 < y < 1$，皆有

$$\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

事实上，当 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \leqslant y < 1$ 时

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx < \int_A^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx = \int_{A-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$\leqslant \int_{A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \int_{A_0-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon,$$

当 $0 < y < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时,

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx < \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^{\frac{1}{y}} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx + \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{y}-1} e^{-\frac{1}{y^2}t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}t^2} dt$$

$$< 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}} dt = 2y\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2y \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \varepsilon,$$

于是积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx$ 在 $0 < y < 1$ 上一致收敛.

最后证明,不存在这样的函数 $\varphi(x)(x \geqslant 1)$ 使

$$0 < e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} \leqslant \varphi(x), x \geqslant 1, 0 < y < 1, \qquad ①$$

且 $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ 收敛. 用反证法,设有这样的函数 $\varphi(x)$ 存在,则由 $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ 的收敛性知,存在 $x_0 > 1$ 使 $\varphi(x_0) < 1$. 于是,令 $y_0 = \dfrac{1}{x_0}$,则 $0 < y < 1$,且

$$e^{-\frac{1}{y_0^2}\left(x_0-\frac{1}{y_0}\right)^2} = 1 > \varphi(x_0),$$

显然与 ① 式矛盾. 因此,一致收敛的积分 I 的被积函数不能以与参数 y 无关的具收敛积分的函数为强函数.

【3754】 证明:积分

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx.$$

(1) 在任意区间 $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ 一致收敛;

(2) 在区间 $0 \leqslant \alpha \leqslant b$ 非一致收敛.

证 显然积分 I 对每一个定值 $\alpha \geqslant 0$ 是收敛的,事实上,当 $\alpha = 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = 0.$$

当 $\alpha > 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

(1) 若 $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$,

则因

$$0 < \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha A} \leqslant e^{-aA},$$

于是任意的 $\varepsilon > 0$,存在不依赖于 α 的数 $A_0 = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$,当 $A > A_0$ 时有

$$\int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx < e^{-aA_0} = \varepsilon.$$

从而在区间 $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上积分 I 一致收敛.

(2) 若 $0 \leqslant \alpha \leqslant b$,则不存在这样的数 A_0,事实上,取 $0 < \varepsilon < 1$. 当 $\alpha \to +0$ 时,$e^{-A\alpha} \to 1$,故对足够小的 α 值,$e^{-A\alpha}$ 比任意一个小于 1 的数 ε 大. 因此,在 $0 \leqslant \alpha \leqslant b$ 上,积分 I 对 α 的收敛不是一致收敛.

【3755】 证明:迪利克雷积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx.$$

(1) 在不含有数值 $\alpha = 0$ 的每一个区间 $[a,b]$ 一致收敛;

(2) 在 含有数值 $\alpha = 0$ 的每一个区间 $[a,b]$ 非一致收敛.

证 不失一般性,我们只考虑 $\alpha > 0$.

(1) 由积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin z}{z} dz = \dfrac{\pi}{2}$ 是收敛的,故任意的 $\varepsilon > 0$,存在

A_0，当 $A > A_0$ 时，恒有

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz\right| < \varepsilon.$$

当 $\alpha > 0$ 时，由于

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz,$$

于是取 $A > \frac{A_0}{a}$，当 $\alpha \geqslant a > 0$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx\right| < \varepsilon$$

从而，在区间 $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上，积分 I 是一致收敛的.

(2) 任给 $A > 0$，当 $\alpha \to +0$ 时，

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2},$$

因此，当 $\alpha > 0$ 且充分小时，有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx > \frac{\pi}{4}.$$

从而，在区间 $0 \leqslant \alpha \leqslant b (b > 0)$ 上，积分 I 不一致收敛.

【3755.1】 研究积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ 在以下区间的一致收敛性：

(1) $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$；

(2) $1 < \alpha < +\infty$.

证 (1) 由 $\alpha_0 > 1$ 知

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha_0}} dx$$

收敛，于是对任给的 $\varepsilon > 0$，均存在 A_0，当 $A > A_0$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha_0}} dx\right| < \varepsilon.$$

又当 $\alpha > \alpha_0$，$x \geqslant 1$ 时

$$\frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{\alpha_0}},$$

故 $$\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x<\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha_0}}\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

从而$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$在$[\alpha_0,+\infty)$，$\alpha_0>1$上一致收敛.

(2) 由 $\alpha>1$ 知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1},$$

收敛.

当 $\alpha\to1+0$ 时，$\frac{1}{\alpha-1}\to\infty$，

于是对任给的 $A>1$，由

$$\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{A^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

有 $$\lim_{\alpha\to1+0}\frac{A^{1-\alpha}}{\alpha-1}=\infty.$$

故存在 $\alpha_0>1$，充分接近 1 有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}>1,$$

从而$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$在 $\alpha\in(1,+\infty)$ 上非一致收敛.

【3755.2】 研究积分的一致收敛性：$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}(0<\alpha<1)$.

解 由

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha},(1>\alpha>0),$$

知其收敛

对任给的 $A\in(0,1)$，由

$$\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

而 $$\lim_{\alpha\to1-0}\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}=+\infty,$$

知任给的 $A>0$,均存在 α_0,α_0 靠近 1,有

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}>1,$$

从而$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 在 $x\in(0,1)$ 上不一致收敛.

【3755.3】 证明:积分$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}$ 在区间 $1<\alpha<+\infty$ 非一致收敛.

证 由

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}+\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1},$$

知右端第一积分是正常积分,于是只要考察$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}$ 的非一致收敛性.

由 $\alpha>1$,$x>1$ 知

$$(x+1)^\alpha>x^\alpha+1,$$

于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}>\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^\alpha}.$$

而由 3755.1(2) 知,当 $\alpha\in(1,+\infty)$ 时$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^\alpha}$ 非一致收敛.故$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}$ 也非一致收敛,证毕.

研究以下积分在指定区间的一致收敛性(3756 ~ 3770).

【3756】 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 因当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ 时,

$$|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x|<\mathrm{e}^{-\alpha_0 x},$$

且积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha_0}$ 收敛,于是积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ 一致收敛.

【3757】 $\int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (a\leqslant\alpha\leqslant b)$.

解　当 $a \leqslant \alpha \leqslant b$ 且 $x \geqslant 1$ 时，$0 < x^{\alpha}e^{-x} \leqslant x^{b}e^{-x}$，又

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot x^b e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{b+2}}{e^x} = 0,$$

于是积分$\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 收敛，从而积分$\int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$ 在区间 $a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上一致收敛.

【3758】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$.

解　由

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

且
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

收敛. 于是积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx$ 在 $-\infty(\alpha < +\infty)$ 上一致收敛.

【3759】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

解　由

$$0 < \frac{1}{(x+\alpha)^2+1} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, (0 \leqslant \alpha < +\infty).$$

且积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

收敛，知$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1}$ 在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

【3760】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

解　因为

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} = 1,$$

于是 $x = 0$ 不是瑕点，因

$$\left| \int_0^A \sin x dx \right| = | 1 - \cos A | \leqslant 2,$$

且当 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 时，函数 $\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ 在 $x > 0$ 关于 x 递减，又因为 $0 \leqslant \alpha < +\infty, x > 0$ 时，$0 < \dfrac{e^{-\alpha x}}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$. 故 $x \to +\infty$ 时 $\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ 关于 $\alpha(0 \leqslant \alpha < +\infty)$ 一致趋于零，

于是由狄里克雷判别法知积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$ 在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

【3760.1】 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \quad (0 \leqslant p \leqslant 10)$.

解
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{e^{40}} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx + \int_{e^{40}}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx = I_1 + I_2,$$

因为 I_1 为正常积分，对任给的 $p \geqslant 0$ 皆可积，因而一致收敛. 对于 I_2，当 $p \in [0,10]$ 时·

$$\ln^p x \leqslant \ln^{10} x, x \geqslant e,$$

于是
$$\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}}, x \geqslant e.$$

若 $\int_{e^{40}}^{+\infty} \dfrac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} dx$ 收敛，则 I_2 关于 $p \in [0,10]$ 一致收敛，于是我们考察积分

$$\int_{e^{40}}^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} dx = \int_{e^{40}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} \cdot \frac{\ln^{10} x}{x^{\frac{1}{4}}} dx,$$

由于 $\int_{e^{40}}^{+\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}} dx$ 收敛. 令

$$f(x) = \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}},$$

因
$$f'(x) = \frac{\ln^9 x(40 - \ln x)}{4x\sqrt[4]{x}} < 0 \qquad (x > e^{40}),$$

于是
$$f(x) = \frac{\ln^{10} x}{4\sqrt{x}},$$

在 $x>e^{40}$ 时关于 x 递减，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{40\ln^9 x}{x^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^{10}\times 10!}{\sqrt[4]{x}}=0.$$

因而由狄克雷判别法知 $\int_{e^{40}}^{+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x\sqrt{x}}dx$ 收敛. 从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x\sqrt{x}}dx$ 关于 p 在 $p\in[0,10]$ 上一致收敛.

【3761】 $\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$. 其中常数 $p>0$.

解 由于

$$\left|\int_1^A\cos x dx\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2,$$

且当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时，函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}$ 在 $x\geqslant 1$ 关于 x 递减，当 $x\to+\infty$ 时，关于 $\alpha(0\leqslant\alpha<+\infty)$ 一致趋于零(这是因为 $0\leqslant\alpha<+\infty$, $x\geqslant 1$ 时， $0<\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$).

于是由狄克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

【3762】 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 该积分收敛，当 $\alpha=0$ 时，积分为 0，当 $\alpha>0$ 时，令

$$\sqrt{\alpha}x=t,$$

有 $$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但该积分不一致收敛，事实上，对任给的 $A>0$. 由

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

知当取 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$，则存在 $\alpha_0>0$，使得

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}\,e^{-\alpha_0 x^2}\,dx>\varepsilon_0.$$

即该积分不一致收敛.

【3763】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$;(1) $a<\alpha<b$;(2) $-\infty<\alpha<+\infty$.

解 对任何固定 α,积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ 都收敛,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx\xlongequal{\text{令}t=x-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

(1) 取$R>0$,且R充分大,使$-R<a<b<R$. 显然,当$|x|\geqslant R$时,对一切$a<\alpha<b$,有

$$0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2}.$$

显然积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x-R)^2}\,dx,$$

收敛,故积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ 在$a<\alpha<b$上一致收敛.

(2) 对任给的 $A>0$,有

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{A-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

于是当 α 充分大时

$$\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx>\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

因此$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 上非一致收敛. 从而$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ 在$-\infty<\alpha<+\infty$上非一致收敛.

【3764】 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy\quad(-\infty<x<+\infty)$.

解 该积分对任一固定的 x 值均收敛. 当 $x>0$ 时

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但对$x\in(-\infty,+\infty)$不是一致收敛的. 事实上,对任何$A>0$,当

$x>0$ 时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\int_{Ax}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2},x\to+0.$$

因此，该积分不一致收敛.

【3765】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx\quad(p\geqslant 0)$.

解　由2380题知积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$收敛，又$\dfrac{1}{1+x^p}(p\geqslant 0)$，在 $x\geqslant 0$ 上对 x 单调递减且一致有界：

$$0<\frac{1}{1+x^p}\leqslant 1,p\geqslant 0,x\geqslant 0$$

于是由阿贝尔判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}dx,$$

对 $p\geqslant 0$ 一致收敛.

【3766】 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$;

(1) $p\geqslant p_0>0$;

(2) $p>0\quad(q>-1)$.

解　$x=0,x=1$ 皆可能是瑕点. 令 $x=e^{-t}$ 有

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=-\int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t}t^q e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt,$$

右端的积分当 $p>0(q>-1)$ 时是收敛的(2361题结论). 从而左端的积分此时也收敛. 更由于($\varepsilon,\varepsilon'>0$ 很小)

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'}x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_{\ln\frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}}e^{-pt}t^q dt,$$

于是$\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 的一致收敛性等价于$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 的一致收敛性.

(1) 当 $p\geqslant p_0>0$ 时，由于 $0<e^{-pt}t^q\leqslant e^{-p_0 t}t^q,0<t<+\infty$,

而积分$\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} t^q dt$收敛，故积分$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$一致收敛. 从而原积分$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q \frac{1}{x} dx$当$p \geqslant p_0 > 0$时一致收敛.

(2) 对任给的$A>0, p>0$，作变量代换$pt=s$，则

$$\int_A^{+\infty} e^{-pt} t^q dt = \frac{1}{p^{q+1}}\int_{pA}^{+\infty} s^q e^{-s} ds,$$

由于$q>-1$，故积分$\int_0^{+\infty} s^q e^{-s} ds$收敛，且

$$0<\int_0^{+\infty} s^q e^{-s} ds <+\infty.$$

于是有 $$\lim_{p\to+0}\int_A^{+\infty} e^{-pt} t^q dt =+\infty.$$

因此，积分$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$在$p>0$上非一致收敛. 从而原积分$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q \frac{1}{x} dx$当$p>0$时非一致收敛.

【3767】 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leqslant n <+\infty)$.

解 $x=1$是瑕点. 因当$0 \leqslant x<1$时有

$$0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, 0 \leqslant n<+\infty,$$

且积分 $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

收敛，于是由维氏判别法知积分$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$，当$0 \leqslant n<+\infty$时一致收敛.

【3768】 $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0<n<2)$.

解 作变量代换

$$\frac{1}{x}=t,$$

则 $$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^n}=\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t.$$

于是$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^n}$的一致收敛相当于$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t$的一致收敛. 显然,当$n<2$时,积分$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t$是收敛的. 以下证:当$0<n<2$时,它非一致收敛. 事实上,当$0<n<2$时,对任给的$m\in\mathbf{N}, m\neq 0$,有

$$\int_{2m\pi}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2-n}}$$

$$>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}.$$

由于 $$\lim_{n\to 2-0}\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}=1,$$

于是当n在$0<n<2$内且与2充分接近时,必有

$$\frac{1}{\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}>\frac{1}{2},$$

从而 $$\int_{2m\pi+\frac{\pi}{4}}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t>\frac{\sqrt{2}\pi}{16}=\text{常数}>0.$$

于是$\int_1^{+\infty} t^{n-2}\sin t\mathrm{d}t$在$0<n<2$上非一致收敛.

【3769】 $\displaystyle\int_0^2\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\quad\left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right).$

解 $x=1, x=2$是瑕点,$x=0$可能是瑕点,把积分分成在$(0,1)$和$(1,2)$上的两个积分.

当$0<x<1$且$|\alpha|<\frac{1}{2}$时,

$$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right|<\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

当 $1<x<2$ 且 $|\alpha|<\frac{1}{2}$ 时,

$$\left|\frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right|<\frac{\sqrt{2}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}.$$

易知上述两个不等式右端的函数分别在区间(0,1) 和(1,2) 上的积分收敛. 于是由维氏判别法知积分

$$\int_0^2 \frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\mathrm{d}x,$$

关于 $|\alpha|<\frac{1}{2}$ 一致收敛.

【3770】 $\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$

解 $$\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x+\int_{\alpha}^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x,$$

对于 $\int_0^{\alpha} \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x$,由于

$$\left|\int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}=2\sqrt{\eta},$$

于是对于任给的 $\varepsilon>0$,只要取 $0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$ 有

$$\left|\int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因此,对 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 它是一致收敛的. 对于

$$\int_{\alpha}^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x,$$

由于 $$\left|\int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-\alpha}}=2\sqrt{\eta},$$

于是对于任给的 $\varepsilon>0$,只需取 $0<\eta<\frac{\varepsilon^2}{4}$ 就有

$$\left|\int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{\sin\alpha}{\sqrt{x-\alpha}}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因此，对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 它是一致收敛的. 故

$$\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x,$$

对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 一致收敛.

【3771】　在给定的参数值下，若积分在参数值的某个邻域内一致收敛，则称该积分对这一给定的参数值是一致收敛的. 证明：积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2},$$

在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛，而在 $\alpha = 0$ 时为非一致收敛.

解　设 α_0 为任一不为零的数，不妨设 $\alpha_0 > 0$，现取 $\delta > 0$，使 $\alpha_0 - \delta > 0$，下面证明积分 I 在 $(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ 内一致收敛. 事实上，当 $\alpha \in (\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ 时，由于

$$0 < \frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2} < \frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2},$$

且积分　$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_0+\delta}{1+(\alpha_0-\delta)^2x^2}\mathrm{d}x,$$

收敛. 于是由维氏判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}$ 在 $(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ 内一致收敛，从而在 α_0 点一致收敛. 由 α_0 的任意性知积分 I 在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛.

下面我们证明积分 I 在 $\alpha = 0$ 时非一致收敛. 事实上，对原点的任何邻域 $(-\delta,\delta)$ 皆有下述结果：对任何的 $A > 0$，有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha\,\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2} = \int_{\alpha A}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},(\alpha > 0).$$

由于　$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{\alpha A}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

故取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$，在 $(-\delta,\delta)$ 中必存在某一个 $\alpha_0 > 0$，使得

$$\left|\int_{\alpha_0 A}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right| > \varepsilon_0,$$

即 $$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha_0\mathrm{d}x}{1+\alpha_0^2x^2}\right|>\varepsilon_0.$$

因此,积分 I 在 $\alpha=0$ 点的任一邻域 $(-\delta,\delta)$ 内非一致收敛. 从而积分 I 在 $\alpha=0$ 时非一致收敛.

【3772】 在下式中把极限移到积分号内合理吗?

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x.$$

解 不合理. 事实上, 由 3754 题(2) 的结论知, 积分 $\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b(b>0)$ 的收敛并非一致,故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理,但对本题,由于

$$\int_0^{+\infty}(\lim_{\alpha\to+0}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x})\mathrm{d}x=0,$$

而 $$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to+0}(-\mathrm{e}^{-\alpha x})\Big|_0^{+\infty}=1,$$

于是 $$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\neq\int_0^{+\infty}(\lim_{\alpha\to+0}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x})\mathrm{d}x.$$

【3773】 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 可积. 证明公式:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

解 为简单起见, 设只有一个瑕点 $x=0$, 已知积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且被积函数中不含有 α,于是它关于 α 一致收敛,又因函数 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 对于固定的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,关于 $x(x>0)$ 是递减的,且一致有界:$0<\mathrm{e}^{-\alpha x}\leqslant1(0\leqslant\alpha\leqslant1,x>0)$,于是由阿贝尔判别法知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 上一致收敛. 于是,对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\eta>0,A_0>0$,且 $\eta<A_0$ 使

$$\left|\int_0^{\eta}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{5},$$

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{5},0\leqslant\alpha\leqslant1.$$

由于 $f(x)$ 在 $[\eta,A_0]$ 上是正常积分,故有界,即存在常数 M_0,使

$$|f(x)| \leqslant M_0, (\eta \leqslant x \leqslant A_0).$$

又由二元函数 $e^{-\alpha x}$ 在 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \eta \leqslant x \leqslant A_0$ 上的一致连续性知，必存在 $\delta > 0 (\delta < 1)$，当 $0 < \alpha < \delta$ 时，对一切 $\eta \leqslant x \leqslant A_0$，皆有

$$0 \leqslant 1 - e^{-\alpha x} < \frac{\varepsilon}{5A_0M_0}.$$

于是，当 $0 < \alpha < \delta$ 时，恒有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_\eta^{A_0} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)\mathrm{d}x + \int_{A_0}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x\right. \\
&\quad \left. + \int_{A_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\eta e^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^\eta f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&< M_0A_0 \cdot \frac{\varepsilon}{5A_0M_0} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此　$$\lim_{\alpha \to +0}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

【3773.1】　证明：若函数 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 绝对可积，则 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在.

证　因为 $\int_0^{+\infty} |f'(x)| \mathrm{d}x$ 收敛，于是 $\int_0^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而

$$\int_0^A f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^A = f(A) - f(0).$$

于是

$$\begin{aligned}
\lim_{A \to \infty} f(A) &= \lim_{A \to \infty}(f(A) - f(0)) + f(0) \\
&= \int_0^\infty f'(x)\mathrm{d}x + f(0).
\end{aligned}$$

【3774】　证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 绝对可积，则

$$\lim_{n \to \infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

证　由 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内绝对可积知对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $A > 0$，

有　$$\int_A^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是 $\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^A f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \frac{\varepsilon}{3}.$

先设 $f(x)$ 在$[0,A]$中无瑕点,我们在$[0,A]$中插入分点 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<t_m=A$,且设 $f(x)$ 在$[t_{k-1},t_k]$上的下确界为 m_k,则有

$$\int_0^A f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(x)-m_k]\sin nx\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^m m_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin nx\,\mathrm{d}x,$$

从而有 $\left|\int_0^A f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|$

$$\leqslant \sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k + \sum_{k=1}^m |m_k| \cdot \frac{|\cos nt_{k-1} - \cos nt_k|}{n}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^m |m_k|,$$

其中 w_k 为 $f(x)$ 在区间$[t_{k-1},t_k]$上的振幅,$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$,由于 $f(x)$ 在$[0,A]$上可积,故可取某一分法,有

$$\left|\sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

对这样固定的分法,$\sum\limits_{k=1}^m |m_k|$ 为一定值,因而存在 N,使当 $n>N$ 时有 $\frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^m |m_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$

于是,对于上述所选的 N,当 $n>N$ 时

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^A f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^m w_k\Delta t_k + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^m |m_k| + \int_A^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

其次,设 $f(x)$ 在区间$[0,A]$中有瑕点,简便起见,不妨设只有一个瑕点 $x=0$,于是,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$ 有

$$\int_0^{\eta}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

但 $f(x)$ 在$[\eta,A]$上无瑕点,故应用上述结论知,存在 N,当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \int_0^{\eta}|f(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \int_A^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

综上所述,若 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内绝对可积,不论 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内有无瑕点,皆有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

【3775】 证明:若(1) 在每一个有限区间(a,b)内 $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$;(2) $|f(x,y)|\leqslant F(x)$,其中$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<+\infty$,则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x$$

证 (1) 表明当 $y\to y_0$ 时,当 x 在任何有限区间(a,b)上,$f(x,y)$ 都一致趋于 $f(x,y_0)$. 于是有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{b} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{b} f(x,y_0)\mathrm{d}x,\qquad \text{任 } b>a.$$

又 $$|f(x,y)|\leqslant F(x),$$

于是令 $y \to y_0$,有

$$|f(x,y_0)| \leqslant F(x).$$

从而$\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛.

对任给的 $\varepsilon > 0$,由

$$\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

故可取定某 $b > a$,使

$$\int_b^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样的 b,又存在 $\delta > 0$,当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时,有

$$\left|\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时,恒有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \int_b^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} |f(x,y_0)|\mathrm{d}x \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \int_b^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x.$

【3776】 利用积分号与极限符号交换,计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]\mathrm{d}x.$$

解 因函数$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在$[0,A]$ 上连续(任 $A > 0$). 于是它在$[0,A]$ 上可积,又$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在$[0,A]$ 上关于 n 单调减小,且

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}=e^{-x^2},$$

为连续函数，于是由狄尼定理，当 $n\to+\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在 $[0,A]$ 上一致趋向于 e^{-x^2}，最后由于

$$0<\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{1+x^2},n=1,2,\cdots,$$

且
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}<+\infty.$$

故积 $\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx$ 关于 n 一致收敛. 因此，应用积分符号与极限号交换定理(见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷). 从而

有
$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

而
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}=\sqrt{n}I_n,$$

其中
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

又
$$\begin{aligned}I_{n-1}&=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}\\&=\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\Bigg|_0^{+\infty}+2(n-1)\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt\\&=2(n-1)I_{n-1}-2(n-1)I_n.\end{aligned}$$

故有
$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1},$$

又
$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2},$$

于是
$$I_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

从而
$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi\sqrt{n}}{2}.$$

由瓦里斯公式,有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2}.$$

最后有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{n}}{(2n-2)!!}$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!\sqrt{2n-1}}{(2n-2)!!}\cdot\sqrt{\frac{n}{2n-1}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

【3776.1】 设 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是有界连续的,证明:

$$\lim_{y\to0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=f(0)$$

证 因为是求关于 $y\to0$ 的极限,不妨设 $y\neq0$,由 $|f(x)|\leqslant M, x\in(0,+\infty)$ 有

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^{+\infty}\frac{|y|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$=M\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{|y|}\right)^2+1}\mathrm{d}\frac{x}{|y|}$$

$$=M\arctan\frac{x}{|y|}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}M.$$

收敛. 因而$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 是 y 的函数. 任 $\varepsilon>0$ 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\varepsilon}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x,$$

1° $y>0$ 时

$$\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{y\,|f(x)|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\arctan\frac{x}{y}\Big|_{\varepsilon}^{+\infty}=M\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\varepsilon}{y}\right),$$

所以　$$\overline{\lim_{y\to+0}}\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\overline{\lim_{y\to+0}}M\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\varepsilon}{y}\right)=0.$$

于是　$$\lim_{y\to+0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=0.$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\varepsilon}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\varepsilon}\frac{y(f(x)-f(0))}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\int_0^{\varepsilon}\frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\\&=f(0)\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^{\varepsilon}+\int_0^{\varepsilon}\frac{y(f(x)-f(0))}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，于是对任给的 $\delta>0$，存在 $\varepsilon_1>0$，当 $x-0<\varepsilon_1$ 时，有 $|f(x)-f(0)|<\delta$，不妨设 $\varepsilon_1=\varepsilon$，于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\varepsilon}\frac{y(f(x)-f(0))}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^{\varepsilon}\frac{y\,|f(x)-f(0)|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\leqslant\delta\int_0^{\varepsilon}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\\&=\delta\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^{\varepsilon}=\delta\arctan\frac{\varepsilon}{y},\end{aligned}$$

所以　$$\overline{\lim_{y\to+0}}\left|\int_0^{\varepsilon}\frac{y(f(x)-f(0))}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\delta.$$

由 δ 的任意性有

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{\varepsilon}\frac{y(f(x)-f(0))}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=0.$$

从而　$$\lim_{y\to+0}\int_0^{\varepsilon}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=f(0)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

于是　$$\begin{aligned}&\lim_{y\to+0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{y\to+0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\lim_{y\to+0}\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\\&=f(0)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=f(0).\end{aligned}$$

同理　$$\lim_{y\to-0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=f(0).$$

故 $$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=f(0).$$

【3776.2】 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}$

解 由

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=I_1+I_2,$$

知 I_1 是正常积分，显然关于 n 一致收敛. 而 I_2 中 $x>1$，于是 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{x^n+1}<\frac{1}{x^2+1}$. 故 I_2 关于 $n(n\geqslant 2)$ 一致收敛，所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}&=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}+\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\\&=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}+\int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\\&=\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}0\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

事实上，

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1},\text{任 }\varepsilon>0,$$

由积分中值定理

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=\frac{1}{\xi^n+1}\cdot(1-\varepsilon),\xi\in[0,1-\varepsilon].$$

$$\int_{1-\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=\frac{1}{\eta^n+1}\cdot\varepsilon<\varepsilon,\eta\in[1-\varepsilon,1].$$

于是 $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\xi^n+1}(1-\varepsilon)=1-\varepsilon.$$

从而 $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\leqslant 1,$$

又 $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\geqslant\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1},$$

于是 $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\geqslant 1-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1} \geqslant 1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{x^n+1}\mathrm{d}x = 1.$$

同理
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1} = 0.$$

【3777】 证明:积分

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x,$$

是参数 a 的连续函数.

证
$$F(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-a}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{a}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

由变上限积分性质知$\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 是$a(\in(-\infty,+\infty))$ 的连续函数,故 $F(a)$ 也是 $a\in(-\infty,+\infty)$ 的连续函数.

【3777.1】 证明:$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha<1$ 区间是连续函数.

证 设 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$,当 $0<x<1$ 时,有 $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$,即$\frac{1}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0}}$. 于是

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha_0}}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha_0}.$$

从而$\int_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$ 一致收敛. 于是 $F(\alpha)$ 当 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$ 时连续,由 α_0 的任意性知 $F(\alpha)$ 在$(0,1)$ 上连续.

【3778】 求函数

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}\mathrm{d}x$$

的不连续点,并作出函数 $y=F(a)$ 的图形.

解 当 $1-a^2>0$,即 $|a|<1$ 时,

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{(1-a^2)x}\mathrm{d}[(1-a^2)x]$$

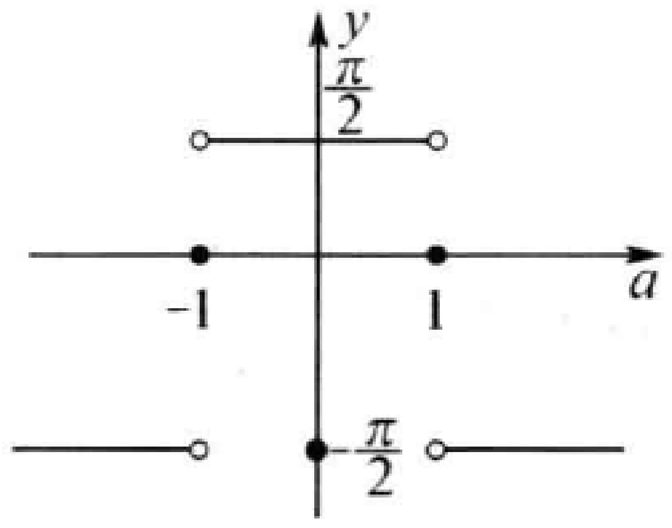
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

当 $1-a^2<0$,即 $|a|>1$ 时

$$F(a)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a^2-1)x}{(a^2-1)x}\mathrm{d}[(a^2-1)x]$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}.$$

当 $1-a^2=0$,即 $|a|=1$ 时,$F(a)=0$,于是 $a=\pm1$ 为 $F(a)$ 的不连续点,如 3778 题图所示



3778 题图

研究下列函数在指定区间的连续性(3779 ~ 3783).

【3779】 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$,当 $\alpha>2$ 时.

解 对于积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$,当 $x\geqslant1$ 时,

$$0<\frac{x}{2+x^\alpha}<\frac{x}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0-1}},$$

其中 $\alpha\geqslant\alpha_0>2$,且积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha_0}-1}$收敛,故积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$对 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 一致收敛. 因此 $F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续,由 $\alpha_0>2$ 的任意性知

$F(\alpha)$ 当 $\alpha > 2$ 时连续.

【3780】 $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$，当 $\alpha > 0$ 时.

解　任给的 $A > 1$，皆有

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| \leqslant 2,$$

而函数 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $x \geqslant 1$，$\alpha > 0$ 时关于 x 单调递减，且由

$$0 < \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha_0}}, x \geqslant 1, \alpha \geqslant \alpha_0 > 0,$$

知当 $x \to +\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 在 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时一致趋于零. 因此，由狄里克雷判别法知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ 对 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ 一致收敛. 于是函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时连续. 由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性有 $F(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

【3781】 $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx$，当 $0 < \alpha < 2$ 时.

解　$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(\pi - t)}{(\pi - t)^\alpha t^\alpha} dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx.$$

由于当 $0 < \eta < 1$，$0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 < 2$ 时，有

$$\int_0^\eta \frac{|\sin x|}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \int_0^\eta \frac{dx}{x^{\alpha - 1}} \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0} \int_0^\eta \frac{dx}{x^{\alpha_1 - 1}}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0} \frac{1}{2 - \alpha_1} \cdot \eta^{2 - \alpha_1},$$

于是对任意的 $\varepsilon > 0$，当

$$0 < \eta < \delta = \min\left\{1, (2 - \alpha_1)^{\frac{1}{2-\alpha_1}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha_0}{2-\alpha_1}} \varepsilon^{\frac{1}{2-\alpha_1}}\right\}$$

时，对所有 $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$，皆有

$$\left|\int_0^{\eta}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{\eta}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

因此,若 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时,瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 一致收敛. 故 $F(\alpha)$ 在 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 上连续,由 $0<\alpha_0<\alpha_1<2$ 的任意性知 $F(\alpha)$ 在 $0<\alpha<2$ 上连续.

【3782】 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\mathrm{d}x$,当 $0<\alpha<1$ 时.

解 $F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha}t}\mathrm{d}t,$

当 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<1$ 时,

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha}t}\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}\mathrm{d}t,$$

易知 $$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^{\alpha_0}t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^{\alpha_0}t},$$

且 $$\lim_{t\to+0}t^{\alpha_0}\cdot\frac{1}{\sin^{\alpha_0}t}=1.$$

于是它是收敛的. 又级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}$ 为公比等于 $\mathrm{e}^{-\pi}<1$ 的几何级数,它也收敛,于是,由维氏判别法知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-n\pi-t}}{\sin^{\alpha_0}t}\mathrm{d}t,$$

对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛,从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 对 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 一致收敛. 因此,$F(\alpha)$ 在 $0<\alpha<\alpha_0$ 上连续. 由 $\alpha_0<1$ 的任意性知 $F(\alpha)$ 在 $0<\alpha<1$ 上连续.

【3783】 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-x\alpha^2}\mathrm{d}x$,当 $-\infty<\alpha<+\infty$ 时.

解 当 $\alpha\neq0$ 时,

$$F(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-x\alpha^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha},$$

连续. 当 $\alpha=0$ 时,

$$F(0)=\int_0^{+\infty}0\cdot e^{-0}dx=0.$$

于是 $F(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处不连续.

§3. 积分号下广义积分的微分法和积分法

1. **对参数的微分法** 若

(1) 函数 $f(x,y)$ 在域 $a\leqslant x<+\infty$, $y_1<y<y_2$ 内是连续的且 $f'_y(x,y)$;存在;

(2) $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛;

(3) $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ 在区间 (y_1,y_2) 一致收敛,

则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx,$$

(莱布尼茨法则).

2. **对参数的积分公式** 若(1) 函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 及 $y_1<y<y_2$ 时是连续的;

(2) $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在有界区间 (y_1,y_2) 一致收敛,

$$\int_{y_1}^{y_2}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dy \qquad ①$$

若 $f(x,y)\geqslant 0$,且假定等式(1) 的一端有意义,则公式 ① 对无穷区间 (y_1,y_2) 也是正确的.

【3784】 利用公式 $\int_0^1x^{n-1}dx=\frac{1}{n}(n>0)$ 计算积分 $I=\int_0^1x^{n-1}\ln^m x\,dx$,其中 m 为自然数.

解 $\frac{dx^{n-1}}{dn}=x^{n-1}\ln x$, $(n>0$,为任意实数) 积分

$$\int_0^1x^{n-1}\ln x\,dx, \qquad ①$$

对于 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛. 事实上,当 $0<x\leqslant 1$, $n\geqslant n_0>0$ 时,

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x,$$

而积分$\int_0^1 x^{n_0-1}\ln x\mathrm{d}x$收敛(2362题结论),因此,由维氏判别法知积分①对$n\geqslant n_0>0$一致收敛.于是积分$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x$对参数$n\geqslant n_0$求导数时,积分号与导数符号可交换,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x^{n-1}}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x.$$

由$n_0>0$的任意性知,上式对任意$n>0$皆成立.同理对n逐次求导数,也可在积分号下求导数,即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}n^2}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(x^{n-1}\ln x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\mathrm{d}x,$$

由数学归纳法有

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}n^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x.$$

但 $$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n},(n>0).$$

于是 $$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}n^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而有 $$\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

【3785】 利用公式$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\quad(a>0)$.

计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^{n+1}}$,其中$n$为自然数.

解 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)=-\frac{1}{(x^2+a^2)^2}$,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^2}, \tag{①}$$

对$a\geqslant a_0>0$一致收敛.事实上,当$x\geqslant 0,a\geqslant a_0>0$时,

$$\frac{1}{(x^2+a)^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a_0)^2}$收敛，于是由维氏判别法知积分①当$a\geqslant a_0\geqslant 0$时一致收敛. 从而由莱布尼兹法则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^2}.$$

由$a_0>a$的任意性知，上式对一切$a>0$皆成立. 同理对积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}$逐次求导数有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^{n+1}},$$

但
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)=-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(-\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)=\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^5}},$$

由数学归纳法有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\frac{(2n-1)!!n}{2^{n+1}}(-1)^n\cdot a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

于是
$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

【3786】 证明：狄利克雷积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

当$\alpha\neq 0$时具有导数，但是不能用莱布尼茨法则求解.

提示：假定$\alpha x=y$.

证　当$\alpha>0$时，令$\alpha x=y$，有

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

当$\alpha<0$时，

$$I(\alpha)=-I(-\alpha)=-\frac{\pi}{2}.$$

于是当$\alpha\neq 0$时，

$$I'(\alpha)=0.$$

但,若用莱布尼兹法则来求,则得错误的结论,事实上,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x,$$

发散,而 $I'(\alpha)=0(\alpha\neq 0)$ 存在,因此,本题不能应用莱布尼兹法则求 $I'(\alpha)$.

【3787】 证明:函数

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x,$$

在域 $-\infty<\alpha<+\infty$ 内连续且可微.

证 设 α_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点,记

$$M=\max(|\alpha_0-1|,|\alpha_0+1|),$$

则当 $x>M,\alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$ 时,有

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-M)^2},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right|=\left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-M)^2}$ 收敛. 于是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\mathrm{d}x$ 在 (α_0-1,α_0+1) 内一致收敛. 从而 $F(\alpha)$ 在 (α_0-1,α_0+1) 内连续且可微分,且可在积分号下求导数. 由 α_0 的任意性知 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且可微分.

【3788】 根据等式 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}\mathrm{d}y$,计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\qquad(a>0,b>0).$$

解 不妨设 $a<b$,注意 e^{-xy} 在 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续. 又积分 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\mathrm{d}x$ 对 $a\leqslant y\leqslant b$ 是一致收敛的. 事实上,当 $x\geqslant 0,a\leqslant y\leqslant b$ 时,$0<e^{-xy}\leqslant e^{-ax}$,但积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛,于是

积分$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$是一致收敛的，故由参数的积分公式有

$$\int_0^{+\infty} dx\int_a^b e^{-xy}dy = \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx.$$

又上式左端为

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,$$

右端为 $\displaystyle\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}.$

从而有 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a}, (a>0, b>0).$

【3789】 证明：**费洛拉尼公式**

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \qquad (a>0, b>0).$$

其中$f(x)$为连续函数，积分$\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$在任意$A>0$均有意义.

证 对任给的$A>0$，有

$$\begin{aligned}
&\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx \\
&= \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}dx - \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}dx \\
&= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \\
&= \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}dt = f(\xi)\int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} = f(\xi)\ln\frac{b}{a},
\end{aligned}$$

其中$\xi\in(Aa, Ab)$，不妨设$a<b$，当$A\to+0$时，$\xi\to+0$. 因$f(x)$在$x=0$点连续，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

运用费洛拉尼公式计算积分(3790 ~ 3792).

【3790】 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx \quad (a>0, b>0).$

解 由于$\cos x$在$(0, +\infty)$内连续，且对任意的$A>0$，积分

$\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 存在,于是由费洛拉尼公式有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}.$$

【3791】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$

解 和 3790 类似,因

$$\sin 0=0,$$

于是 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\mathrm{d}x=0.$$

【3792】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$

解 令

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x,$$

则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续,由于 $f(x)>0$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

于是对任给的 $A>0$,积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 皆收敛,因此由费洛拉尼公式有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan ax\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan bx\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

于是 $$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

用对参数的微分法计算下列积分(3793 ~ 3796).

【3793】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2}+2\beta x e^{-\beta x^2}}{1}=0.$$

于是 $x=0$ 不是瑕点，又由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{x}{\alpha x^2}}-e^{\frac{x}{\beta x^2}}\right)=0.$$

从而任给的 $\alpha>0,\ \beta>0$，积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ 皆收敛，现令 $\beta>0$ 固定，把所求积分视为含参变量 $\alpha(\alpha>0)$ 的积分，设

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx,\qquad(\alpha>0).$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx.$$

下证右端积分在 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛，事实上，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$0\leqslant x<+\infty$ 时，

$$0\leqslant xe^{-\alpha x^2}\leqslant xe^{-\alpha_0 x^2},$$

而积分

$$\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha_0 x^2}dx=\frac{1}{2\alpha_0},$$

收敛. 故积分$\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛，因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，可在积分号下对参数求导数

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立，积分后有

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+C,\alpha\in(0,+\infty),$$

其中 C 为待定的常数，在此式中令 $\alpha=\beta$，有

$$0=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=I(\beta)=-\frac{1}{2}\ln\beta+C,$$

故 $$C=\frac{1}{2}\ln\beta.$$

于是 $$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha},(\alpha>0).$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha},\quad(\alpha>0,\quad\beta>0).$$

【3794】 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\alpha e^{-\alpha x}+\beta e^{-\beta x}}{1}=\beta-\alpha,$$

于是 $x=0$ 不是瑕点，又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2=0,$$

于是积分$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha a}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ 收敛($\alpha>0,\beta>0$). 同样，把 $\beta>0$ 固定，考虑含参变量 α 的积分，

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{2}\right)^2dx,\alpha>0.$$

由于 $$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx=-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx$$

$$=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}(\alpha>0),(3788\text{ 题结论}).$$

而当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0,1\leqslant x<+\infty$ 时

$$\left|\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\right|\leqslant\frac{2e^{-\alpha_0x}}{x},$$

且$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha_0x}}{x}dx$ 收敛，事实上这是由

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{e^{-\alpha_0x}}{x}=0,$$

知其收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}dx,$$

当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛，从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}=dx,$$

当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛，请注意，$x=0$ 不是瑕点，这是因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}=\beta-\alpha.$$

因此，由莱布尼兹法则，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，可在积分号下求导数

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立，积分后有

$$I(\alpha)=-2\int\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}d\alpha+C,$$

又 $$\int\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}d\alpha=\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}+\beta\ln(\alpha+\beta)+C,$$

于是 $$I(\alpha)=-2\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+C.$$

其中 C 是待定常数，令 $\alpha=\beta$，由 $I(\beta)=0$ 有

$$0=-2\beta\ln\frac{2\beta}{2\beta}-2\beta\ln2\beta+C.$$

故 $$C=2\beta\ln2\beta.$$

于是有 $$I(\alpha)=\ln\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2\alpha}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+2\beta\ln2\beta$$

$$=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}},$$

即 $$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}},\ \alpha>0,\beta>0.$$

【3795】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx\quad(\alpha>0,\beta>0).$

解 当 $m=0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx=0,$$

现设 $m\neq0$，由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx=0,$$

于是 $x=0$ 不是瑕点，从而被积函数在 $\{(x,\alpha,\beta)\mid x\in[0,+\infty),\alpha>0,\beta>0\}$ 内连续，其中 $x=0$ 时的函数的值理解为极限值，又由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x}e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right| \leqslant \frac{e^{-\alpha x}+e^{-\beta x}}{x}, x>0,$$

而积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\beta x}}{x}dx$ 收敛,故积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ 收敛,从而积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ 收敛,当 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right)dx = -\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx,$$

是一致收敛的,事实上

$$|e^{-\alpha x}\sin mx| \leqslant e^{-\alpha_0 x}, x \geqslant 0,$$

又积分$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx = \frac{1}{\alpha_0}$ 收敛,于是对于积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx,$$

当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则,得

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx = -\frac{m}{\alpha^2+m^2}, \text{(1829 题结论)}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知,上式对一切 $\alpha < 0$ 皆成立. 从而

$$I(\alpha) = -\int\frac{m}{\alpha^2+m^2}d\alpha = -\arctan\frac{\alpha}{m}+C,$$

其中 C 是待定常数,令 $\alpha = \beta$, 则得

$$I(\beta) = 0 = -\arctan\frac{\beta}{m}+C,$$

于是 $\qquad C = \arctan\frac{\beta}{m}.$

从而我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\text{sim}mx\,dx = \arctan\frac{\beta}{m}-\arctan\frac{\alpha}{m},$$

$$m \neq 0.$$

【3796】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \quad (\alpha>0,\beta>0).$

解 和 3795 类似,当 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ 时,积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx,$$

可用莱布尼兹法则有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\right)dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos mx\,dx=-\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2},$$

(1828 题结论).

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立，从而

$$I(\alpha)=-\int\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+m^2}=-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2)+C,$$

其中 C 是待定常数，令

$$\alpha=\beta,$$

有 $$I(\beta)=0=-\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)+C.$$

于是 $$C=\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2).$$

从而 $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$$

$(\alpha>0,\beta>0)$.

计算积分(3797 ～ 3802).

【3797】 $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx\quad(|\alpha|\leqslant 1)$.

解 由

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{2\alpha^2x}{1-\alpha^2x^2}}{2x}$$

$$=-\alpha^2,$$

知 $x=0$ 不是瑕点，故被积函数在 $\{(x,\alpha)\mid 0\leqslant x<1,\ |\alpha|<1\}$ 内连续，注意 $x=0$ 时的函数值理解为极限值，又由于当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，

$$\left|\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant -\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}, 0<x<1,$$

而积分$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛,这是因为

$$\lim_{x\to1-0}{}^{(1-x)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}} = 0.$$

于是积分$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$,对$|\alpha|\leqslant 1$一致收敛,从而为$\alpha$的连续函数,$-1\leqslant\alpha\leqslant 1$.另一方面,易知积分

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x = -2\alpha\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

对$|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$一致收敛,事实上

$$\left|\frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{2}{1-\alpha_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$0\leqslant x<1,$$

而积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ 收敛,于是,对积分

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

当$|\alpha|\leqslant\alpha_0$时可用莱布尼兹法则有

$$I'(\alpha) = -2\alpha\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

由$\alpha_0<1$的任意性知,上式对一切$|\alpha|<1$皆成立.现在考察

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

作变量代换$x=\sin t$有

$$I_1 = \int\frac{\mathrm{d}t}{1-\alpha^2\sin^2 t} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{1-\alpha\sin t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\alpha\sin t}\right).$$

再对右端两个积分作变量代换

$$u = \tan\frac{t}{2},$$

有 $$\int\frac{\mathrm{d}t}{1-\alpha\sin t} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_1,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\alpha\sin t} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+C_2.$$

从而 $$I'(\alpha) = -2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha\sin t}+\frac{1}{1+\alpha\sin t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)+\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},\qquad |\alpha|<1.$$

两端积分有

$$I(\alpha) = -\pi\int\frac{\alpha\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \pi\sqrt{1-\alpha^2}+C,\ |\alpha|<1,$$

其中 C 是待定常数,令 $\alpha=0$ 有

$$I(0) = 0 = \pi + C.$$

于是 $$C = -\pi,$$

从而 $$I(\alpha) = -\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2}),\ |\alpha|<1.$$

在上式两端 $\alpha\to 1-0$ 和 $\alpha\to -1+0$ 取极限,且由 $I(\alpha)$ 在$[-1,1]$上连续有

$$I(1) = I(-1) = -\pi.$$

于是,当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时

$$\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2}).$$

【3798】 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\quad(|\alpha|\leqslant 1).$

解 和 3797 类似,我们有

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

在$[-1,1]$上连续,且当$|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$时,可用莱布尼兹法则,于是

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 \frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{(1-\alpha^2x^2)-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\alpha}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}\\&=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}},\ |\alpha|\leqslant\alpha_0,\alpha\neq 0.\end{aligned}$$

由$\alpha_0<1$的任意性知上式对一切$0<|\alpha|<1$皆成立,积分后有

$$\begin{aligned}I(\alpha)&=\int\left(\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\mathrm{d}\alpha\\&=\pi\ln|\alpha|+\pi\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right|+C\\&=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})+C,\end{aligned}$$

其中$|\alpha|<1$, $\alpha\neq 0$,C为待定常数. 令$\alpha\to 0$,且由$I(\alpha)$在$\alpha=0$的连续性有

$$I(0)=0=\pi\ln 2+C.$$

于是 $\quad C=-\pi\ln 2,$

从而有 $\quad I(\alpha)=\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2},\ |\alpha|<1.$

在上式中令$\alpha\to 1-0$和$\alpha\to -1+0$又及$I(\alpha)$在$[-1,1]$上的连续性知上式当$\alpha=\pm$时也成立,于是

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2},\ |\alpha|\leqslant 1.$$

【3799】 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

解　设

$$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx,$$

显然 $I(0)=0$，当 $\alpha<0$ 时，由

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\cdot\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{2},$$

于是 $I(\alpha)$ 收敛，其次易知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}.$$

对 $\alpha\geqslant 0$ 一致收敛. 事实上，当 $\alpha\geqslant 0, 0\leqslant t<1$ 时，有

$$\left|\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

且 $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 收敛. 于是用莱布尼兹法则有

$$I'(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)dx$$
$$=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}=\int_0^1\frac{(t^2+\alpha^2)-\alpha^2}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}dt$$
$$=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\alpha^2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}},\alpha\geqslant 0.$$

从而有

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\int\frac{\alpha\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2}+C,\alpha\geqslant 0,$$

其中 C 为待定常数，令 $\alpha=0$ 有

$$I(0)=0=-\frac{\pi}{2}+C,$$

于是 $C=\frac{\pi}{2}$. 从而当 $\alpha\geqslant 0$ 时

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}).$$

当 $\alpha<0$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(-\alpha)x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}),$$

于是，当 $-\infty<\alpha<+\infty$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha.$$

【3800】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x.$

解 令

$$I_\beta=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 是参数，$\beta>0$ 固定. 该积分当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ ($\alpha_1>0$ 为任何有限数) 时一致收敛. 事实上，当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时

$$0\leqslant\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\leqslant\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2},x\in[0,+\infty),$$

而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，这是因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{\beta^2+x^2} = 0.$$

于是 $I_\beta(x)$ 是 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 上的连续函数，由 $\alpha_1>0$ 的任意性知，$I_\beta(\alpha)$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时连续. 其次，易证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}.$$

当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时是一致收敛的，事实上，此时

$$0\leqslant\frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\leqslant\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)},$$

$$0\leqslant x<\infty,$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\mathrm{d}x$ 收敛. 于是，由莱布尼兹法则，当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ 时，在积分号下求导数有

$$I'_\beta(x)=\frac{\pi}{\alpha\beta+1}.$$

由 α_1 与 α_0 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 皆成立，两端积分有

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta)+C, 0<\alpha<+\infty.$$

其中 C 是某常数，在此式中令 $\alpha\to+0$ 取极限，且 $I_\beta(\alpha)$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上连续有

$$0=I_\beta(0)=0+C,$$

于是 $C=0$，从而

$$I_\beta(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(1+\alpha\beta), 0\leqslant\alpha<+\infty.$$

对于所求积分，作适当变形，当 $\alpha>0$，$\beta>0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\ln\alpha+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\beta^2+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}x^2\right)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\ln\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta).$$

此式当 $x=0$ 时也成立,只要在两端令 $\alpha\to+0$ 取极限即可. 这是因为积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x,(\beta>0\text{ 固定}),$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时一致收敛,易知

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x\quad\text{与}\quad\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时都一致上敛. 事实上

$$\left|\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\right|\leqslant-\frac{2\ln x}{\beta^2+x^2},$$

$$0<x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2},$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,又

$$0\leqslant\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\leqslant\frac{\ln(\frac{1}{4}+x^2)}{\beta^2+x^2},$$

$$\frac{1}{2}\leqslant x<+\infty,\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2},$$

而 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\ln(\frac{1}{4}+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,于是 $I(\alpha)$ 在点 $\alpha=0$(右) 连续.

对任意 的 α 与 $\beta(\beta\neq0)$,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(|\alpha|^2+x^2)}{|\beta|^2+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|).$$

当 $\beta=0$ 时，上式不成立，右端无意义，左端的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{x^2}dx$ 易知其发散.

【3801】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx$.

解 设 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,

显然 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}=\alpha\beta.$$

当 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$ 时

$$\left|\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}\right|<\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2},x\in[1,+\infty),$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，于是积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}dx$ 在 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$ 时一致收敛，从而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}dx$ 也在 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$ 时一致收敛. 因此，函数

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}dx,$$

是 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$ 上的二元连续函数，下面考察

$$\begin{aligned}J(\alpha,\beta)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\arctan\alpha x\cdot\arctan\beta x}{x^2}\right)\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K(\alpha,\beta)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right)dx\\&=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)},\end{aligned}$$

两个积分，由于当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0,\beta\geqslant 0$ 时

$$\left|\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\right|<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2(1+\alpha_0^2x^2)},\quad x\in[1,+\infty),$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha_0^2x^2)}$ 收敛，于是积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$，当 α

$\geqslant \alpha_0$，$\beta \geqslant 0$ 时一致收敛，又因为 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}=\beta$，故 $x=0$ 不是瑕点，从而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant 0$ 也一致收敛. 因此，$J(\alpha,\beta)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$\beta\geqslant 0$ 时连续，且 $I(\alpha,\beta)$ 可在积分号下对 α 求导数有

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x=J(\alpha,\beta), \qquad ①$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，(1) 式对一切 $\alpha>0,\beta\geqslant 0$ 成立，且 $J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0,\beta\geqslant 0$ 上的二元连续函数.

其次，由于当 $\beta\geqslant\beta_0>0,\alpha>0$ 时

$$0<\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\leqslant\frac{1}{1+\beta_0^2x^2},0\leqslant x<\infty,$$

而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\beta_0^2x^2}$ 收敛，于是积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}$，当 $\beta\geqslant\beta_0$，$\alpha>0$ 时一致收敛，因此 $K(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0,\beta\geqslant\beta_0$ 上的连续函数，且 ① 式中的积分当 $\beta\geqslant\beta_0$，$\alpha>0$ 时可在积分号下对 β 求导数，有

$$\begin{aligned}I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)&=J'_{\beta}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\\&=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\beta^2x^2}\\&=\frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}-\frac{\beta\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)},\end{aligned}$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知，任意的 $\alpha>0,\beta>0$ 皆有

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_{\beta}(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}. \qquad ②$$

请注意，在推导此式时应设 $\alpha\neq\beta$，因为推导过程中分母内有 $\alpha^2-\beta^2$，但由于 $K(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0,\beta>0$ 上的连续函数，故通过取极即知 ② 式当 $\alpha=\beta$ 时也成立，在 ② 式中固定 $\alpha>0$，对 β 积分有

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha),$$

$$\beta\in(0,+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数,在此式中令 $\beta \to +0$,且 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha > 0, \beta \geqslant 0$ 上的连续性有

$$0 = J(\alpha,0) = \lim_{\beta \to +0} J(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\ln\alpha + C(\alpha).$$

于是 $$C(\alpha) = -\frac{\pi}{2}\ln\alpha.$$

因此 $$I'_{\alpha}(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

再固定 $\beta > 0$,对 α 积分,由分部积分法有

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \frac{\pi}{2}\beta\ln(\alpha+\beta) + C_1(\beta),$$

其中 $C_1(\beta)$ 是依赖于 β 的常数,在此式中令 $\alpha \to +0$,且 $I(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$ 上连续有

$$0 = I(0,\beta) = \lim_{\alpha \to +0} I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\beta\ln\beta + C_1(\beta),$$

于是 $$C_1(\beta) = -\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta,$$

从而 $$I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}(\alpha > 0, \beta > 0).$$

综上所述,对任给的 α,β 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x \cdot \arctan\beta x}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \cdot \dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|} \cdot |\beta|^{|\beta|}}, & \alpha\beta \neq 0, \\ 0, & \alpha\beta \neq 0. \end{cases}$$

【3802】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\mathrm{d}x.$

解 设 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$,因为

$$\lim_{x \to +0}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4} = \alpha^2\beta^2,$$

于是 $x = 0$ 不是瑕点,当 $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1, 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$ 时有

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}$$

$$\leqslant \frac{\ln(1+\alpha_1^2 x^2)\ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^4},$$

又因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{\ln(1+\alpha_1^2 x^2)\ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^4} = 0.$$

故$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha_1^2 x^2)\ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^4}\mathrm{d}x$ 收敛,

于是 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\mathrm{d}x$,当 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时一致收敛,

因此,函数

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\mathrm{d}x \qquad ①$$

是 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上的二元连续函数,由 $\alpha_1>0, \beta>0$ 的任意性知,$I(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha\geqslant0, \beta\geqslant0$ 上的二元连续函数,现考察

$$J(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2(1+\alpha^2 x^2)}\mathrm{d}x, \qquad ②$$

$$K(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2(1+\alpha^2 x^2)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \qquad \alpha>0, \beta>0. \qquad ③$$

两个积分,由于当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时,恒有

$$0\leqslant \frac{2\alpha\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2(1+\alpha^2 x^2)} \leqslant \frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2 x^2)}, \ 0<x<+\infty.$$

又$\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha_1\ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^2(1+\alpha_0^2 x^2)}\mathrm{d}x$ 收敛,于是 ② 式中积分在 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上一致收敛,由此知 $J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上的连续函数,且在其上 ① 中的积分可在积分号下对 α 求导

数有

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x=J(\alpha,\beta), \qquad ④$$

由 $\alpha_1>\alpha_0>0,\beta_1>0$ 的任意性知，$J(\alpha,\beta)$ 是 $\alpha>0,\beta\geqslant 1$ 上的连续函数，且 ④ 式对一切 $\alpha>0,\beta\geqslant 0$ 皆成立

其次，当 $0<\alpha\leqslant\alpha_1,0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 时，恒有

$$0<\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\leqslant\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}, x\in(0,+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，于是 ③ 式中的积分在 $0<\alpha\leqslant\alpha_1$，$0<\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$ 上一致收敛，从而，在其上 ② 式中的积分可在积分号下对 β 求导数，有

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=J'_{\beta}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \qquad ⑤$$

由 $\alpha_1>0,\beta_1>\beta_0>0$ 的任意性知，⑤ 式对一切 $\alpha>0,\beta>0$ 都成立，⑤ 式两端对 β 积分后($\alpha>0$ 固定)有

$$I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)=2\pi\alpha\beta-2\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha),$$

$$\beta\in(0,+\infty),$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数，在此式中令 $\beta\to+0$ 取极限，且由 $J(\alpha,\beta)$ 在 $\alpha>0,\beta\geqslant 0$ 上连续有

$$0=J(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0}J(\alpha,\beta)=-2\pi\alpha^2\ln\alpha+C(\alpha).$$

于是 $\qquad C(\alpha)=2\pi\alpha^2\ln\alpha.$

因此 $\qquad I'_{\alpha}(\alpha,\beta)=2\pi\alpha\beta-\pi\alpha^2\ln(\alpha+\beta)+2\pi\alpha^2\ln\alpha,$

$$\alpha>0,\beta>0.$$

两端对 α 积分($\beta>0$ 固定)有

$$I(\alpha,\beta)=\pi\alpha^2\beta-\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln(\alpha+\beta)+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3$$

$$-\pi\alpha^2\beta-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln(\alpha+\beta)$$

$$+\frac{2}{3}\pi\alpha^3\ln\alpha-\frac{2\pi}{9}\alpha^3+C_1(\beta),\alpha\in(0,+\infty),$$

其中$C_1(\beta)$是依赖于β的常数，在此式两端令$\alpha\to+0$取极限，且由$I(\alpha,\beta)$在$\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$上连续有

$$\begin{aligned}0=I(0,\beta)&=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)\\&=\frac{2\pi}{9}\beta^3-\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta+C_1(\beta),\end{aligned}$$

于是 $$C_1(\beta)=-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi\beta^3\ln\beta.$$

从而 $$\begin{aligned}I(\alpha,\beta)&=-\frac{2}{3}\pi(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)+\frac{2\pi}{9}(\alpha+\beta)^3\\&\quad-\frac{2\pi}{9}\alpha^3-\frac{2}{9}\pi\beta^3+\frac{2}{3}\pi(\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta)\\&=\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta\\&\quad-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)],\alpha>0,\beta>0.\end{aligned}$$

因此，对任意的α,β有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}[|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha|^3\ln|\alpha|+|\beta|^3\ln|\beta|\\\qquad-(|\alpha|^3+|\beta|^3)\ln(|\alpha|+|\beta|)],\alpha\beta\neq 0,\\0,\quad \alpha\beta=0.\end{cases}$$

【3803】 根据公式 $I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2y^2}\mathrm{d}y$

计算欧拉—泊松积分：$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解 在积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$中，令$x=ut$，其中$u$为任意正数，

有 $$I=u\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t.$$

在上式两端乘以$\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}u$再对$u$从0到$+\infty$积分有

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}dt. \qquad ①$$

因被积函数 $ue^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数,且

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2(1+t^2)},$$

和 $$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udt=e^{-u^2}\cdot I.$$

分别对于 t 和 u 是连续的,积分互换后的逐次积分存在.于是,①式中积分顺序可以互换(见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷),并且有

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

由 $I>0$ 有 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

利用欧拉—泊松积分,计算积分值(3804 ~ 3811).

【3804】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx \quad (a>0,ac-b^2>0)$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]}dx$$

$$=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

注:从解题过程看出,只要 $a>0$ 这个条件就够了.

【3805】 $\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$

$(a>0,ac-b^2>0)$.

解 设 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax+b)=t$,

则 $$x=\frac{\sqrt{a}t-b}{a},$$

代入 $$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+C_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a_1}{a}t^2+\frac{2(ab_1-a_1b)}{a\sqrt{a}}t+\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+C_1\right]e^{-t^2}dt.$$

由于 $$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}tde^{-t^2}$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

于是我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+C_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\left[\frac{a_1}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\left(\frac{a_1b^2-2abb_1}{a^2}+c_1\right)\sqrt{\pi}\right]$$

$$=\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

注:只要条件 $a>0$ 即可.

【3806】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{ch}bx\,dx \quad (a>0).$

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{ch}bx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}(e^{bx}+e^{-bx})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2-bx)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \qquad \text{(3804 题结论)}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

【3807】 $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a > 0)$.

解 由

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

及 2355 题的结论有

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)^2} dx = e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+4a)} dx$$

$$= e^{-2a}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

【3808】 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$.

解 由分部积分法知

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = -\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}) d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\Bigg|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} (\alpha e^{-\alpha x^2} - \beta e^{-\beta x^2}) dx$$

$$= -2\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2} d(\sqrt{\alpha}x) + 2\int_0^{+\infty} \sqrt{\beta} e^{-(\sqrt{\beta}x)^2} d(\sqrt{\beta}x)$$

$$= -2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2\sqrt{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}).$$

【3809】 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx \quad (a > 0)$.

解 令 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx$,

由于 $\quad e^{-ax^2} \cos bx$,

和 $\quad \frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2} \cos bx) = -xe^{-ax^2} \sin bx$,

皆是 $x \geqslant 0, -\infty < b < +\infty$ 上的连续函数,且此时

$$|e^{-ax^2} \cos bx| \leqslant e^{-ax^2}, \qquad |xe^{-ax^2} \sin bx| \leqslant xe^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} dx$ 皆收敛,于是积分

$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$ 皆在 $-\infty<b<+\infty$ 上一致收敛,从而可在积分号下求导数有

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx,\ -\infty<b<+\infty.$$

由分部积分法有

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$$
$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{b}{2a}I(b).$$

故 $$I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b),b\in(-\infty,+\infty).$$

于是 $$\int\frac{I'(b)}{I(b)}db=-\frac{1}{2a}\int b\,db,$$

即 $$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C,b\in(-\infty,+\infty),$$

其中 C 是待定常数,即

$$I(b)=C_1e^{-\frac{b^2}{4a}},b\in(-\infty,+\infty).\qquad ①$$

其中 C_1 也是待定常数,但

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

代入 ① 有 $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx=I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}},$$
$$b\in(-\infty,+\infty).$$

【3810】 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx\quad(a>0).$

解 $$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bx\,d(e^{-ax^2})$$
$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (3809\text{ 结论}).$$

【3811】 $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ （n 为自然数）.

解 由 3809 结论有

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}. \qquad ①$$

由$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial b^k}(e^{-x^2}\cos 2bx)\,dx = 2^k\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2}\cos\left(2bx+\frac{k\pi}{2}\right)dx$，

②

又 $$\left|x^k e^{-x^2}\cos\left(2bx+\frac{k\pi}{2}\right)\right| \leqslant x^k e^{-x^2},x\geqslant 0,$$

而积$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2}\,dx$ 对任意的自然数 k 皆收敛，于是积分 ② 当 $-\infty<b<+\infty$ 时一致收敛，因此，① 式的左端可在积分号下求任意次导数，从而有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^{2n}}{\partial b^{2n}}(e^{-x^2}\cos 2bx)\,dx = \int_0^{+\infty} 2^{2n}x^{2n}e^{-x^2}\cos(2bx+n\pi)\,dx$$

$$= 2^{2n}(-1)^n\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}),$$

即 $$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = (-1)^n\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2}).$$

【3811.1】 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-axt^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0,\sigma>0).$$

证 因为要求 $x\to+\infty$ 的极限，于是不妨设 $x>0$，

由 $$\sqrt{x}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-axt^2}\,dt \xlongequal{\text{令 } u=\sqrt{ax}t} \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\sigma\sqrt{ax}}^{\sigma\sqrt{ax}} e^{-u^2}\,du,$$

有 $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-axt^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\sigma\sqrt{ax}}^{\sigma\sqrt{ax}} e^{-u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

【3812】 根据积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x\quad(\alpha\geqslant 0).$$

计算狄利克雷积分:

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x.$$

解 设 $\beta>0$,把 β 固定,α 看作参量,与3760题类似,知积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant 0$ 时一致收敛,从而 $I(\alpha)$ 是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数,又因为

$$\lim_{x\to+0}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}=\beta,$$

故 $x=0$ 不是瑕点.由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

易知积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛,这是因为 $|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}$,而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x$ 收敛,于是当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$ 可在积分号下求导数有

$$I'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 皆成立,两端对 α 积分有 $\quad I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+C,\alpha\in(0,+\infty),$ ①

其中 C 是某常数,由 $|\sin u|<|u|$ 知

$$|I(\alpha)|\leqslant\beta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\alpha},\alpha\in(0,+\infty).$$

由此知 $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}I(\alpha)=0,$

在①式两端令 $\alpha\to+\infty$ 取极限有

$$0=-\frac{\pi}{2}+C,$$

于是 $\qquad C = \frac{\pi}{2}.$

从而 $\qquad I(\alpha) = -\arctan\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\pi}{2}, \alpha \in (0, +\infty).$ ②

在 ② 式两端令 $\alpha \to +0$ 取极限，又由 $I(\alpha)$ 在 $\alpha \geqslant 0$ 上连续性有

$$D(\beta) = I(0) = \lim_{x \to +0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

当 $\beta < 0$ 时，$D(\beta) = -D(-\beta) = -\frac{\pi}{2}$，

又 $\qquad D(0) = 0,$

综上所述有 $D(\beta) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\beta.$

【3812.1】 积分正弦曲线 $y = \mathrm{Si}x$ 的图形大体上是什么形式？其中 $\mathrm{Si}x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

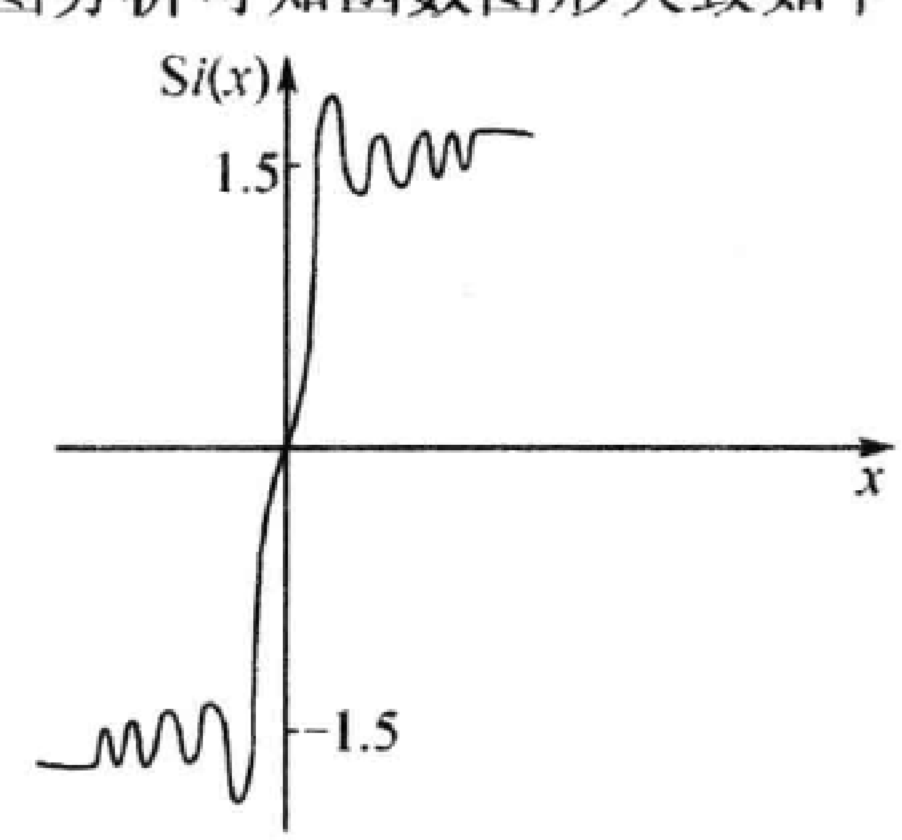
解 由 $\mathrm{Si}(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \xlongequal[t=-y]{\text{令 } y=-t} \int_0^x \frac{\sin(-y)}{-y}\mathrm{d}(-y)$

$$= -\int_0^x \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y = -\mathrm{Si}x,$$

知 $\mathrm{Si}x$ 为奇函数，图象关于原点对称. 又

$$\lim_{x \to +\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

由常规的作图分析可知函数图形大致如下 3812.1 题图



3812.1 题图

利用狄利克雷和费洛拉尼积分,求积分值(3813 ~ 3822).

【3813】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx\quad(\alpha>0)$.

解 令 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$,

因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2}+\beta\sin\beta x}{2x}=\frac{\beta^2}{2}-\alpha$.
于是 $x=0$ 不是瑕点. 由于

$$\left|\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right|\leqslant\frac{2}{x^2},x>0,$$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛. 于是 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛. 从而 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$ 也在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上一致收敛. 于是 $I(\beta)$ 是 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续函数. 下设 $\beta>0$. 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

又 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 在 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 上一致收敛,这是因为当 $x\to+\infty$ 时,$\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零,而

$$\left|\int_0^A\sin\beta x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\beta A}{\beta}\right|\leqslant\frac{2}{\beta_0},$$

故由狄里克雷判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 在 $\beta\geqslant\beta_0$ 上一致收敛. 故当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时,可在积分号下求导数,得

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2},\text{(3812 题结论)}.\qquad ①$$

由 $\beta_0>0$ 的任意性知 ① 式对一切 $\beta>0$ 皆成立. 因此

$$I(\beta)=\frac{\pi}{2}\beta+C,(0<\beta<+\infty),\qquad ②$$

其中 C 是某常数. 在 ② 式两端令 $\beta\to+0$ 取极值,又由 $I(\beta)$ 在 $-\infty<\beta<+\infty$ 上的连续性有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx = I(0) = \lim_{\beta\to+0} I(\beta) = C. \qquad ③$$

由 3808 题结论有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx = \sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}),\quad \alpha>0,\beta>0. \qquad ④$$

令

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx,\qquad \alpha>0,$$

仿上面证明，可知$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ 当$\beta\geqslant 0$时一致收敛，故$J(\beta)$是$\beta\geqslant 0$上的连续函数，于是，在④式两端令$\beta\to+0$取极限有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-1}{x^2}dx = J(0) = \lim_{\beta\to+0} J(\beta) = -\sqrt{\pi\alpha},\alpha>0.$$

代入③式有$C=-\sqrt{\pi\alpha}$. 故

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2}\beta-\sqrt{\pi\alpha},(0\leqslant\beta<+\infty).$$

当$\beta<0$时，

$$I(\beta) = I(-\beta) = \frac{\pi}{2}(-\beta)-\sqrt{\pi\alpha},$$

综上所述有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi\alpha},\alpha>0.$$

【3814】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx \quad (|\alpha|\neq|\beta|).$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|,\text{(3790 结论)}.$$

【3815】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx.$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x - \sin(\beta-\alpha)x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{若 } |\alpha| < |\beta|, (3791\text{ 结论}), \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha, & \text{若 } |\alpha| = |\beta|, (3812\text{ 结论}), \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha, & \text{若 } |\alpha| > |\beta|. (3812\text{ 结论}), \end{cases}$$

【3816】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\mathrm{d}x.$

解 由 $\sin 3\alpha x = 3\sin\alpha x - 4\sin^3\alpha x$,

有
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{3\sin\alpha x - \sin 3\alpha x}{4x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \qquad (3812\text{ 结论}),$$

$$= \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

【3817】 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解 记

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\mathrm{d}x,$$

当 $\alpha \geqslant 0$ 时,因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 = \alpha^2,$$

于是 $x=0$ 不是瑕点. 又

$$\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 \leqslant \frac{1}{x^2},$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \geqslant 0$ 上一致收敛,从而 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \geqslant 0$ 时一致收敛,因此 $I(\alpha)$ 是 $\alpha \geqslant 0$ 上的连续

函数. 又因

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}\mathrm{d}x$当$\alpha\geqslant\alpha_0>0$时一致收敛(见3813的解题过程). 于是当$\alpha\geqslant\alpha_0$时可在积分号下求导数有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \qquad ①$$

由$\alpha_0>0$的任意性知,①式对一切$\alpha>0$皆成立,两端积分有

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha+C,\alpha\in(0,+\infty),$$

其中C是某常数. 在上式两端令$\alpha\to+0$取极限,且由$I(\alpha)$在$\alpha\geqslant 0$时的连续性知

$$0=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=C.$$

于是 $$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha,\alpha\in[0,+\infty).$$

当$\alpha<0$时,显然

$$I(\alpha)=I(-\alpha)=\frac{\pi}{2}(-\alpha).$$

于是对任何α,有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\mid\alpha\mid.$$

【3818】 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$

解 $$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3\alpha x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\sin^3\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{3\alpha}{2x}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x\cos^2\alpha x-\alpha\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=3\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{9}{2}\alpha^2\cdot\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha\qquad(3816\text{ 结论})$$

$$=\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha=\frac{3\pi}{8}\alpha\mid\alpha\mid.$$

【3819】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x.$

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\sin^4 x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

【3820】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\mathrm{d}x\quad(\alpha\beta\neq 0).$

解 由 $\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3).$

有 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4\alpha x-\cos 4\beta x}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2\alpha x-\cos 2\beta x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|,\quad(\alpha\neq 0,\beta\neq 0).$$

若 $\alpha=\beta=0$,显然积分为零,若 $\alpha=0(\beta\neq 0)$,或 $\beta=0(\alpha\neq 0)$,易知积分发散.

【3821】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}\mathrm{d}x.$

解 令 $x=\sqrt{t}$,

有
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

【3822】 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\mathrm{d}x\quad(k\geqslant 0,\alpha>0,\beta>0).$

解
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\{-k\mathrm{e}^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x$$
$$+\mathrm{e}^{-kx}(\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x)\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\mathrm{d}x$$
$$-k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x,$$

由
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\alpha\sin\beta x\cos\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x-\sin(\alpha-\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left(\arctan\frac{\alpha+\beta}{k}-\arctan\frac{\alpha-\beta}{k}\right)\qquad(3812\text{ 题结论}),$$
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\beta\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\beta}{2}\left(\arctan\frac{\alpha+\beta}{k}+\arctan\frac{\alpha-\beta}{k}\right),$$
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{[(\mathrm{e}^{-kx}-1)+1]\cdot[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x]}{2x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-kx}-1)\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-kx}-1)\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right| \qquad (3796\text{ 题结论})$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2+k^2}{(\alpha-\beta)^2+k^2},$$

我们有 $$\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{2}\arctan\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\arctan\frac{\alpha-\beta}{k}$$

$$+\frac{k}{4}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2+k^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2}.$$

【3823】 对于不同的 x 值,求解狄利克雷不连续因子

$$D(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\cos\lambda x\frac{d\lambda}{\lambda}$$

作出函数 $y=D(x)$ 的图形.

解 $$D(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)\lambda+\sin(1-x)\lambda}{\lambda}d\lambda,$$

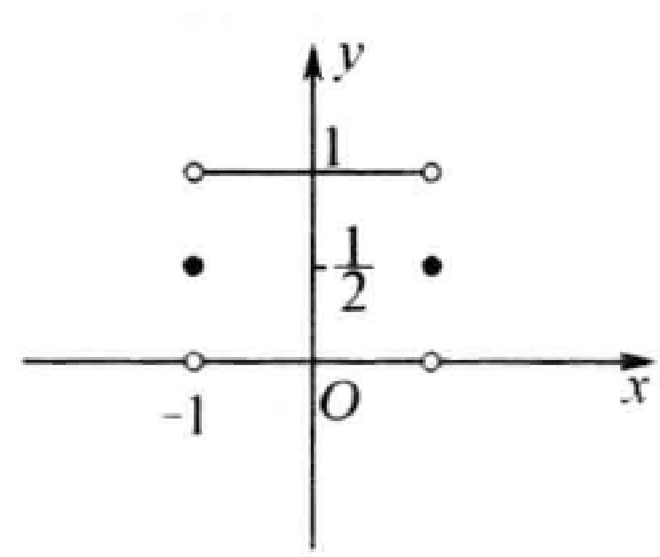
当 $|x|<1$ 时,有 $1+x>0,1-x>0$,由 3812 题的结论有

$$D(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

当 $|x|=1$ 时,$1+x$ 和 $1-x$ 中总有一个为零,另一个为正值,

于是 $$D(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

当 $|x|>1$ 时,$(1+x)(1-x)<0$,有 $D(x)=0$,如 3823 题图所示



3823 题图

【3824】　计算积分：

(1) $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}\mathrm{d}x$；

(2) $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}\mathrm{d}x$.

解　(1) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}\mathrm{d}x$

$$=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a(t-b)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at\cos ab}{t}\mathrm{d}t-V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos at\sin ab}{t}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\cos ab dt=\pi\,\mathrm{sgn}\,a\cos ab.$$

(2) 同理

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}\mathrm{d}x=\pi\,\mathrm{sgn}\,a\sin ab.$$

【3825】　利用公式

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\mathrm{d}y,$$

计算拉普拉斯积分：

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解　$L=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\mathrm{d}y,$

因被积函数 $\cos\alpha x\,\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}$ 是 $0\leqslant x<+\infty,0\leqslant y<+\infty$ 上的连续函数，又绝对值的积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}|\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\cos\alpha x|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}<+\infty,$$

于是原累次积分可交换积分顺序有

$$L=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}\cos\alpha x\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{\alpha^2}{4y}}dy\qquad(3809\text{ 题结论})$$

$$=\int_0^{+\infty}\sqrt{\pi}e^{-\left[t^2+\frac{1}{t^2}\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^2\right]}dt$$

$$=\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\cdot\frac{|\alpha|}{2}}\qquad(3807\text{ 结论})$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$

【3826】 计算积分:

$$L_1=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

解 由$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right)=-\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}$,

于是我们考察积分

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,$$

因 $$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$收敛,于是$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$当$-\infty<\alpha<+\infty$时一致收敛. 又当$\alpha\geqslant\alpha_0>0$时

$$\left|\int_0^A\sin\alpha x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos\alpha A}{\alpha}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha_0},$$

而$\frac{x}{1+x^2}$当$x>1$时递减,且当$x\to+\infty$时趋于零,于是由狄里克雷判别法知积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$,当$\alpha\geqslant\alpha_0$时一致收敛. 因此,当$\alpha\geqslant\alpha_0$时可在积分号下求导数有

$$\frac{dL}{d\alpha}=-L_1,\qquad ①$$

由$\alpha_0>0$的任意性知①式对一切$\alpha>0$成立. 由3825题知当

$\alpha > 0$ 时,

$$L = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}.$$

于是由①式知

$$L_1 = -\frac{dL}{d\alpha} = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}(\alpha > 0).$$

当 $\alpha < 0$ 时,

$$L_1 = -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(-\alpha)x}{1+x^2}dx = -\frac{\pi}{2}e^{\alpha},$$

而当 $\alpha = 0$ 时,$L_1 = 0$,综上所述,有

$$L_1 = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha \cdot e^{-|\alpha|}.$$

计算积分(3827 ~ 3829).

【3827】 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx.$

解 $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2} \qquad \text{(3825 的结论)}$$

$$= \frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$$

【3828】 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx.$

解 $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos\alpha x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x\cos\alpha x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \alpha x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|} - \frac{\pi}{4}e^{-|\alpha|} + \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha \cdot e^{-|\alpha|},$$

(3825 和 3826 题的结论).

【3829】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx \quad (a>0, ac-b^2>0)$.

解 $ax^2+2bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right]$,

令 $m=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}, t=\frac{1}{m}\left(x+\frac{b}{a}\right), m>0$,

于是 $ax^2+2bx+c=am^2(t^2+1)$,

$$\cos\alpha x=\cos\alpha\left(mt-\frac{b}{a}\right)=\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}+\sin\alpha mt\sin\frac{b\alpha}{a}.$$

从而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx$

$$=\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt\cos\frac{b\alpha}{a}}{1+t^2}dt+\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha mt\sin\frac{b\alpha}{a}}{1+t^2}dt.$$

由于

$$\left|\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$

收敛. 于是积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}dt$ 收敛,同理,积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha mt}{1+t^2}dt$ 收敛.

又 $\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}$ 为偶函数, $\frac{\sin\alpha mt}{1+t^2}$ 为奇函数,于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha mt}{1+t^2}dt=\pi e^{-m|\alpha|},$$

(3825 的结论),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha mt}{1+t^2}dt=0.$$

从而有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx=\frac{1}{am}\cos\frac{b\alpha}{a}\cdot\pi e^{-m|\alpha|}$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}e^{-\frac{|\alpha|\sqrt{ac-b^2}}{a}}.$$

【3830】 利用公式：

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy \quad (x>0),$$

计算菲涅尔积分：

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,$$

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx,$$

解 在

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy,$$

的两端乘以 $\sin x$，然后在 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上积分有

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy,$$

由于 $|\sin x\cdot e^{-xy^2}|\leqslant e^{-x_0y^2}$，

而$\int_0^{+\infty}e^{-x_0y^2}dy$收敛，于是积分$\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy^2}dy$在$x_0\leqslant x\leqslant x_0$上一致收敛，从而可进行积分顺序的互换有

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dy\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}dx\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-xy^2}(y^2\sin x+\cos x)}{1+y^4}\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1}dy\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_0\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy\\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{y^2e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy.
\end{aligned}$$

因 $e^{-x_0y^2}\leqslant 1, e^{-x_1y^2}\leqslant 1$，且积分$\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy$和$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}$ 皆收

敛，故上述等式右端的诸积分分别对 $0 \leqslant x_0 < +\infty, 0 \leqslant x_1 < +\infty$ 都是一致收敛的，因此它们分别都是 $x_0, x_1 (x_0 \in [0, +\infty), x_1 \in [0, +\infty))$ 的连续函数，从而令 $x_0 \to +0$，可在积分号下取极限有

$$\int_0^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.$$

因上式右端的后两个积分皆不超过积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_1 y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}},$$

且
$$\lim_{x_1 \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}} = 0,$$

于是令 $x_1 \to \infty$ 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

最后有
$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同理
$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

求解积分值(3831 ~ 3833).

【3831】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0).$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(at^2 + \frac{ac - b^2}{a}\right) dt$$

$$= \cos\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin at^2\,dt + \sin\frac{ac-b^2}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos at^2\,dt$$

$$= \operatorname{sgn}a\cdot\cos\frac{ac-b^2}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2\,dy$$

$$+ \sin\frac{ac-b^2}{a}\cdot\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2\,dy$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2|a|}}\left(\operatorname{sgn}a\cdot\cos\frac{ac-b^2}{a}+\sin\frac{ac-b^2}{a}\right)$$

（3830 结论）

$$= \sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right).$$

【3832】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx.$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin(x^2+2ax)+\sin(x^2-2ax)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)+\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)\right] \quad \text{（3831 结论）}$$

$$= \sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)=\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

【3833】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx.$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(x^2+2ax)+\cos(x^2-2ax)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sin\left(x^2+2ax+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x^2-2ax+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a^2+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{（3831 的结论）}$$

$$= \sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}+a^2\right).$$

【3834】 证明公式:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha$.

其中 $a\neq 0$,并且积分理解为柯西意义上的主值.

证 (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a-x}\mathrm{d}x+\int_0^{a-\eta}\frac{\cos\alpha x}{a+x}\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a-x}\mathrm{d}x+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\cos\alpha x}{a+x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[-\int_a^{\eta}\frac{\cos\alpha(a-t)}{t}\mathrm{d}t+\int_a^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.-\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t+a)}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\cos\alpha(t-a)-\cos\alpha(t+a)}{t}\mathrm{d}t+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.-\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\sin\alpha a}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t$$
$$-\frac{1}{2a}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\cos\alpha(t-a)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sin a\alpha}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha\text{,(3812 结论)}.$$

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}$

$$=\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx+\int_{a+\eta}^{A}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_0^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x-a}dx+\int_0^{a-\eta}\frac{\sin\alpha x}{x+a}dx\right.$$

$$\left.+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x-a}dx+\int_{a+\eta}^{A}\frac{\sin\alpha x}{x+a}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{-a}^{-\eta}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_a^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\int_a^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t+a)}{t}dt+\int_{2a+\eta}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\left[\int_{\eta}^{A-a}\frac{\sin\alpha(t-a)+\sin\alpha(t+a)}{t}dt\right.$$

$$\left.+\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\int_{2a+\eta}^{2a-\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\eta\to+0\\A\to+\infty}}\int_{\eta}^{A-a}\frac{2\sin\alpha t\cos\alpha a}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_{A-a}^{A+a}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt+\frac{1}{2}\lim_{\eta\to+0}\int_{2a-\eta}^{2a+\eta}\frac{\sin\alpha(t-a)}{t}dt$$

$$=-\cos a\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha,\qquad(3812\text{ 的结论}).$$

注:(1) 应加条件 $\alpha\geqslant0$,否则当 $\alpha<0$ 时有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(-\alpha)x}{a^2-x^2}=\frac{\pi}{2a}\sin a(-\alpha)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sin a\alpha.$$

(2) 应加条件 $\alpha>0$,否则当 $\alpha=0$ 时,等式左端 $=0$,右端 $=$

$-\frac{\pi}{2}$，当 $\alpha<0$ 时有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(-\alpha)x}{a^2-x^2}$$

$$=-\left[-\frac{\pi}{2}\cos a(-\alpha)\right]=\frac{\pi}{2}\cos a\alpha.$$

【3835】 对于函数 $f(t)$，若：

(1) $f(t)=t^n$(n 为自然数)；

(2) $f(t)=\sqrt{t}$；

(3) $f(t)=e^{\alpha t}$；

(4) $f(t)=te^{-\alpha t}$；

(5) $f(t)=\cos t$；

(6) $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$；

(7) $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

求拉普拉斯变换

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt\quad(p>0)$$

解 (1) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^n dt$

$$=-\frac{1}{p}e^{-pt}t^n\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^{n-1}dt$$

$$=\frac{n}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^{n-1}dt=\cdots$$

$$=\frac{n!}{p^n}\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(2) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sqrt{t}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\sqrt{t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{dt}{\sqrt{t}}$

$$=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pu^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}.$$

(3) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}e^{\alpha t}=\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-p)t}dt$,

当 $p>\alpha$ 时

$$F(p)=\frac{1}{p-\alpha}.$$

当 $p\leqslant\alpha$ 时,积分发散.

(4) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}te^{-\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}te^{-(p+\alpha)t}dt$

$$=\frac{1}{(p+\alpha)^2},\qquad (p+\alpha>0).$$

(5) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cos t dt=\frac{-p\cos t+\sin t}{p^2+1}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$

$$=\frac{p}{p^2+1}.$$

(6) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{1+e^{-t}}{t}dt$,

因 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-e^{t}}{t}=1,\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}=0.$

于是函数$\frac{1-e^{-t}}{t}$有界,即

$$0<\frac{1-e^{-t}}{t}\leqslant M=\text{常数},t\in(0,+\infty).$$

因此,当 $p>0$ 时,$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ 收敛,且

$$0<F(p)\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{M}{p},p>0. \qquad ①$$

又 $$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}(e^{-t}-1)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)t}dt-\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p},\qquad p>0.$$

它对 $p\geqslant p_0>0$ 是一致收敛的. 因此,当 $p\geqslant p_0$ 时,可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼兹法则有

$$F'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p},p\geqslant p_0.$$

由 $p_0>0$ 的任意知,上式对一切 $p>0$ 皆成立. 两端积分有

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}+C,0<p<+\infty, \qquad ②$$

其中 C 是某常数,由 ① 式知

$$\lim_{p\to+\infty}F(p)=0,$$

于是,在 ② 式两端令 $p\to+\infty$,取极限,有 $C=0$,由此可知

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

(7) $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\alpha\sqrt{t}\,dt=2\int_0^{+\infty}ue^{-pu^2}\sin\alpha u\,du$

$$=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}},(3810\text{ 的结论}).$$

【3836】 证明公式(李普希兹积分):

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(a>0).$$

其中 $$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi.$$

为 0 角标的贝塞耳函数(见第 3726 题).

证 $\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-at}dt\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)d\varphi,$

由于积分$\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt,$

对 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 是一致收敛的. 于是可交换积分顺序,有

$$\int_0^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{-a\cos(bt\cos\varphi)+b\sin\varphi\cdot\sin(bt\sin\varphi)}{a^2+b^2\sin^2\varphi}e^{-at}\Big|_0^{+\infty}\right)d\varphi$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{(a^2+b^2)\tan^2\varphi+a^2} = \frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+b^2)t^2+a^2}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\arctan\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,t}{a}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

【3837】 若

(1) $f(y)=1$;

(2) $f(y)=y^2$;

(3) $f(y)=\mathrm{e}^{2ay}$;

(4) $f(y)=\cos ay$.

求维尔斯特拉斯变换：

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}f(y)\mathrm{d}y$$

解 (1) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$$

(2) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}(x+u)^2\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u^2\mathrm{d}u+\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u\mathrm{d}u+\frac{x^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u^2\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-u^2})$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}u\mathrm{e}^{-u^2}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u\mathrm{d}u=0,$$

于是有 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=x^2+\frac{1}{2}.$

(3) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{e}^{2ay}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2+2ay}\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2+2ax} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x-a)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2+2ax} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= e^{a^2+2ax}.$$

(4) $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \cos ay\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos a(x+u)\, du$$

$$= \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos au\, du - \frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin au\, du$$

$$= \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}} - 0 \qquad \text{(3809 结论)}$$

$$= e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax.$$

【3838】 下面的公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

定义出了切贝绍夫 - 埃尔米特多项式. 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

证 由 1231 题知, $H_n(x)$ 为一个 n 次多项式, 且 x^n 的系数为 2^n, 不妨设 $m \leqslant n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) dx$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) d\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\right]$$

$$= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2}) dx$$

$$= \cdots = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(m)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2}) dx$$

$$= \cdots = (-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)} e^{-x^2} dx.$$

当 $m < n$ 时，

$$H_m^{(n)}(x) = 0.$$

于是 $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0.$$

当 $m = n$ 时，

$$H_m^{(n)}(x) = 2^n n!.$$

从而 $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

【3839】 计算在概率论中具有重要意义的积分：

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]} d\xi \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0)$$

解 $$\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2} = \frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2 - 2\sigma_1^2 x\xi + \sigma_1^2 x^2],$$

令 $$a = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \qquad b = -\frac{\sigma_1^2 x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \qquad c = \frac{\sigma_1^2 x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

于是 $$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}, \text{(3804 的结论)}.$$

把 a,b,c 的表达式代入上式，设

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2},$$

则有 $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

【3840】 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且绝对可积.

证明：积分

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

满足热传导方程式$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

和初始条件$\lim\limits_{t\to+0} u(x,t) = f(x)$.

证 当$t > 0, -\infty < x < \infty$时

$$|f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}| \leqslant |f(\xi)|,$$

而
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi < +\infty,$$

于是积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$在$t > 0, -\infty < x < +\infty$上一致收敛.

从而$u(x,t)$是$t > 0, -\infty < x < \infty$上的连续函数,考察积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} d\xi, \quad ①$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{\xi-x}{2a^2t} d\xi, \quad ②$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}) d\xi$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[-\frac{1}{2a^2t} + \frac{(\xi-x)^2}{4a^4t^2}\right] d\xi. \quad ③$$

先考虑①式中的积分,由于对$|x| \leqslant x_0, 0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1, x_0, t_0, t_1$固定,当$|\xi| > x_0$时有

$$\left| f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right|$$
$$\leqslant |f(\xi)| \cdot e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2},$$

而
$$\lim_{|\xi|\to+\infty} e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2} = 0,$$

于是当$|\xi| > x_0$时有

$$\left| f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right| \leqslant M|f(\xi)|,$$

其中M是某常数. 于是,由$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi < +\infty$,据维氏判别法

知,① 式中的积分在 $|x|\leqslant x_0, 0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上一致收敛.

同理,② 式中的积分和 ③ 式中的积分都在 $|x|\leqslant x_0, 0<t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上一致收敛. 于是在对应的区域上可应用莱布尼兹法则在积分号下求导数有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]\mathrm{d}\xi, \quad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{\xi-x}{2a^2t}\mathrm{d}\xi, \quad ⑤$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t}-1\right]\mathrm{d}\xi. \quad ⑥$$

由 x_0, t_0, t_1 的任意性知,④,⑤,⑥ 三式对一切 $-\infty<x<+\infty, t>0$ 皆成立,由 ④,⑥ 式有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t>0, -\infty<x<+\infty.$$

下面证明

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x), x\in(-\infty,+\infty). \quad ⑦$$

固定 x,由 $t>0$ 知,作变量代换

$$u=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}},$$

知 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=2a\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=2a\sqrt{\pi t}.$$

于是 $$u(x,t)-f(x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi.$$

对任意的 $\varepsilon>0$,因为 $f(x)$ 在 x 点处连续,于是存在 $\delta>0$,当 $|\xi-x|\leqslant\delta$ 时,恒有

$$|f(\xi)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

有 $$\begin{aligned}&u(x,t)-f(x)\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x+\delta}+\int_{x+\delta}^{+\infty}\right)[f(\xi)-f(x)]\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

下面估计 I_1, I_2, I_3，有

$$|I_2| = \left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right) = \frac{\varepsilon}{3}.$$

又 $|I_3| = \left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}[f(\xi)-f(x)]e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right|$

$$\leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi + \frac{|f(x)|}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x+\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$\leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|d\xi + \frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-u^2}du,$$

因此 $\lim\limits_{t\to+0} I_3 = 0.$

同理 $\lim\limits_{t\to+0} I_1 = 0.$

于是 存在 $\eta > 0$，当 $0 < t < \eta$ 时，恒有

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |I_1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

故当 $0 < t < \eta$ 时，恒有

$$|u(x,t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

于是 ⑦ 式成立，证毕.

§4. 欧拉积分

1. Γ- **函数** 当 $x > 0$ 时有

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

Γ- 函数的主要性质用递推公式表示：

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

若 n 为正整数，则

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2. **余元公式** 当 $0<x<1$ 时有：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

3. $B-$**函数** 当 $x>0$ 及 $y>0$ 时有：

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

下式是正确的：

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

【3841】 证明：Γ- 函数 $\Gamma(x)$ 在 $x>0$ 的域内是连续的，且具有各阶的连续导数.

证 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，

当 $x\geqslant x_0>0$ 时

$$0<t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^{x_0-1}\mathrm{e}^{-t},(0<t<1).$$

而 $\int_0^1 t^{x_0-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛，故 $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 当 $x\geqslant x_0$ 时一致收敛，又当 $x\leqslant x_1$ 时，$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}$，$t\geqslant 1$，而 $\int_1^{+\infty}t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛，故当 $x\leqslant x_1$ 时，$\int_1^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 一致收敛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 在 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 于是 $\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上连续. 由 $x_0,x_1(x_1>x_0>0)$ 的任意性有 $\Gamma(x)$ 在 $x>0$ 上连续.

考察积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt.$$

当 $x \geqslant x_0 > 0$ 时，

$$| t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} | \leqslant t^{x_0-1} | \ln t |, 0 < t \leqslant 1.$$

而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1} | \ln t | dt$ 收敛，事实上

$$\lim_{t \to +0} t^{1-\frac{x_0}{2}} \cdot t^{x_0-1} | \ln t | = \lim_{t \to +0} (-t^{\frac{x_0}{2}} \ln t) = 0.$$

于是积分 $\int_0^1 t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt$ 当 $x \geqslant x_0 > 0$ 时一致收敛. 同样，当 $x \leqslant x_1$ 时，

$$| t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} | \leqslant t^{x_1} e^{-t}, (t \geqslant 1).$$

事实上，$t \geqslant 1$ 时，$0 \leqslant \ln t < t$，又积分 $\int_1^{+\infty} t^{x_1} e^{-t} dt$ 收敛. 于是积分 $\int_1^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dx$ 当 $x \leqslant x_1$ 时一致收敛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t e^{-t} dt$ 在 $0 < x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上一致收敛，由此，$\Gamma(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上具有连续的导函数 $\Gamma'(x)$ 且在积分号下求导数有

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt. \qquad ①$$

由 x_0, x_1 的任意性知 $\Gamma'(x)$ 在 $x > 0$ 上连续，且 ① 式对一切 $x > 0$ 皆成立.

类似地，可证 $\Gamma''(x)$ 在 $x > 0$ 上连续，且可在 ① 式积分号下求导数，一般地，由归纳法知，对任何正整数 n，$\Gamma^{(n)}(x)$ 在 $x > 0$ 上都存在连续，且可在积分号下求导数，有

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^n \cdot e^{-t} dt, t > 0.$$

【3842】 证明：B - 函数 $B(x, y)$ 在 $x > 0, y > 0$ 的域内是连续的，且具有各阶连续导数.

证 由于当 $x \geqslant x_0 > 0, y \geqslant y_0 > 0$ 时，恒有

$$0 < t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}, t \in (0,1).$$

而积分$\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}\mathrm{d}t$收敛，于是积分$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$在$x \geqslant x_0, y \geqslant y_0$上一致收敛，从而$B(x,y)$是$x \geqslant x_0, y \geqslant y_0$上的二元连续函数. 由$x_0 > 0, y_0 > 0$的任意性知，$B(x,y)$在整个区域$x > 0, y > 0$上连续. 下面考察积分

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[t^{x-1}(1-t)^{y-1}]\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\mathrm{d}t,$$

由于当$x \geqslant x_0 > 0, y \geqslant y_0 > 0$时，恒有

$$|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t| \leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|,$$

$$0 < t < 1.$$

又

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\frac{x_0}{2}} \cdot t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t| = -\lim_{t\to+0} t^{\frac{x_0}{2}}\ln t = 0,$$

$$\lim_{t\to1-0}(1-t)^{1-\frac{y_0}{2}} \cdot t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|$$

$$= -\lim_{t\to1-0}(1-t)^{\frac{y_0}{2}}\ln t = 0.$$

故积分$\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|\mathrm{d}t$收敛，于是积分$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\mathrm{d}t$，当$x \geqslant x_0, y \geqslant y_0$时一致收敛. 因此，当$x \geqslant x_0, y \geqslant y_0$时可在积分号下对$x$求导数有

$$B'_x(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\mathrm{d}t, \quad ①$$

且$B'_x(x,y)$是$x \geqslant x_0, y \geqslant y_0$上的连续函数. 由$x_0 > 0, y_0 > 0$的任意性知，①式对一切$x > 0, y > 0$皆成立. 且$B'_x(x,y)$是域$x > 0, y > 0$上的二元连续函数，同理可证，$B'_y(x,y)$是域$x > 0, y > 0$上的二元连续函数，且$x > 0, y > 0$时，可在积分号下对$y$求导数有

$$B'_y(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln(1-t)\mathrm{d}t.$$

类似地,由归纳法,可证$\dfrac{\partial^n B(x,y)}{\partial x^i \partial y^{n-i}}$在域$x>0,y>0$上存在并连续,且
$$\frac{\partial^n B(x,y)}{\partial x^i \partial y^{n-i}}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^i[\ln(1-t)]^{n-i}\mathrm{d}t.$$

用欧拉积分计算下列积分(3843 ~ 3850).

【3843】 $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x.$

解 $$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2!}$$

由于$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi.$

于是 $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

从而 $$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}.$$

【3844】 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0).$

解 $$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$
$$=a^4\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$=a^4\int_0^1 u^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=\frac{a^4}{2}\int_0^1 u(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u^2$$
$$=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi a^4}{16}.$$

【3845】 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$

解 设$\dfrac{x}{1+x}=t$,

则 $$x=\frac{t}{1-t},\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t,$$

代入有 $$\int_0^{+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

【3846】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$

解 设 $x^3=t$,

则 $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}\mathrm{d}t,$$

作变量代换 $\dfrac{t}{1+t}=u$,

有 $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【3847】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}.$

解 设 $x^4=t$,

则 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

作变量代换 $\dfrac{t}{1+t}=u$,

有 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-\frac{1}{4}}(1-u)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

【3848】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x \mathrm{d}x$.

解 设 $t = \sin x$,

则 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x = \int_0^1 t^6(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t.$$

作变量代换 $t = \sqrt{u}$,

有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{5}{2}}(1-u)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{512}.$$

【3849】 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n>1)$.

解 设 $x^n = t$,

有 $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

【3850】 $\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \quad$ (n 为正整数).

解 $\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{2n-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}.$$

确定下列积分的存在域并用欧拉积分表示这些积分(3851 ~ 3871).

【3851】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx \qquad (n > 0).$

解 令 $x^n = t$, $\quad \frac{t}{1+t} = u$,

有
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t} dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1} (1-u)^{\frac{n-m}{n}-1} du.$$

此积分定义域为$\frac{m}{n} > 0, \frac{n-m}{n} > 0$,即 $0 < m < n$,这时我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, \frac{n-m}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

【3852】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx.$

解 设$\frac{x}{1+x} = t$,

有
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-m-1} dt$$

$$= B(m, n-m),$$

定义域为 $m > 0, n-m > 0$,即 $0 < m < n$.

【3853】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \mathrm{d}x}{(a+bx^n)^p} \qquad (a>0,b>0,n>0).$

解 设$\frac{bx}{a+bx^n}=t$,

有 $$x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}+1}}\mathrm{d}t.$$

代入有 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{b^p}\int_0^{+\infty}\left(\frac{bx^n}{a+bx^n}\right)^p x^{m-np}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m+1}{n}-1}(1-t)^{p-\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right),$$

定义域为$\frac{m+1}{n}>0,\qquad p-\frac{m+1}{n}>0.$

即 $$0<\frac{m+1}{n}<p.$$

【3854】 $\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\mathrm{d}x \qquad (0<a<b,c>0).$

解 设$\frac{b+c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x+c}=t$,

则 $$x=\frac{a+lct}{1-lt},$$

其中 $$l=\frac{b-a}{b+c},$$

且 $$x-a=\frac{(a+c)lt}{1-lt},$$

$$x-b=\frac{(a-b)+(b+c)lt}{1-lt},$$

$$x+c=\frac{a+c}{1-lt},\mathrm{d}x=\frac{(a+c)l}{(1-lt)^2}\mathrm{d}t,$$

代入有 $$\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\frac{l^{m+1}}{(a+c)^{n+1}}\int_0^1 t^m[(a-b)+(b+c)lt]^n\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(b-a)^{m+n-1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\int_0^1 t^m(1-t)^n\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1),$$

定义域为 $m>-1,n>-1$.

【3855】 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}}\qquad(m>0)$.

解 设 $x^m=t$,

有 $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}}=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right),$$

定义域为 $1-\frac{1}{n}>0$,即 $n<0$ 或 $n>1$.

【3856】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\sin x=t,t^2=u$,

有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),$$

定义域为 $m>-1,n>-1$.

【3857】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\sin x=t,t^2=u$,

有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,dx$$

$$=\int_0^1 t^n(1-t^2)^{-\frac{n+1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{n+1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1-n}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{n+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}},$$

定义域为$\frac{n+1}{2}>0,\frac{1-n}{2}>0$,即$|n|<1$.

【3858】 $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx \qquad (0<|k|<1).$

解 设 $\tan\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\tan\frac{x}{2}$,

有 $$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\tan\frac{t}{2}.$$

由三角恒等式有

$$\sin x=\frac{\sqrt{1-k^2}\sin t}{1-k\cos t},\cos x=\frac{\cos t-k}{1-k\cos t},$$

$$1+k\cos x=\frac{1-k^2}{1-k\cos t},dx=\frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k\cos t}dt,$$

代入有 $$\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx$$

$$=(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}t\,dt$$

$$=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}\frac{t}{2}\cos^{n-1}\frac{t}{2}dt.$$

在上式右端的最后一个积分中,依次作变量代换

$$\sin\frac{t}{2}=u,u^2=y,$$

有 $$\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\mathrm{d}x$$
$$=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^1 2u^{n-1}(1-u^2)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{d}u$$
$$=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}\int_0^1 y^{\frac{n-2}{2}}(1-y)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=2^{n-1}(1-k^2)^{-\frac{n}{2}}B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right),$$

定义域为 $n>0$.

【3859】 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\qquad(n>0)$.

解　设 $x^n=t$,

有 $$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

定义域为$\frac{1}{n}>0$,即 $n>0$.

【3860】 $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$.

解　当 $n>0$ 时,作变量代换

$x^n=t$,

有 $$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

当 $n<0$ 时,仍作变量代换

$x^n=t$,

有 $$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{+\infty}^{0}t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

把上述结论合并有当 $n\neq 0$ 时

$$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

当 $n=0$ 时,积分$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}x$ 显然发散. 所以积分$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$ 的

定义域为$\dfrac{m+1}{n}>0$.

【3861】 $\int_0^1\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$.

解 设 $x=\mathrm{e}^{-t}$,

有 $$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0 t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(p+1).$$

定义域为 $p>-1$.

【3862】 $\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\ln x\mathrm{d}x \qquad (a>0)$.

解 由 3841 题的证明过程知积分

$$\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\ln x\mathrm{d}x,$$

关于 p 在 $-1<p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时一致收敛. 于是当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\ln x\mathrm{d}x,$$

但 $$\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}},$$

因此 $$\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\ln x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right],p_0\leqslant p\leqslant p_1.$$

由 $-1<p_0<p_1$ 的任意性知,上式对一切 $p>-1$ 皆成立.

【3863】 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x \qquad (p>0)$.

解 由 3852 题的结论知

$$B(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x,1>p>0.$$

显见,所求积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x,$$

下证积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x,$$

在 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<1$ 上一致收敛. 事实上

$$\left|\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\right|\leqslant\frac{x^{p_0-1}|\ln x|}{1+x},0<x\leqslant 1,$$

而积分 $\int_0^1\frac{x^{p_0-1}|\ln x|}{1+x}dx$ 收敛,这是因为

$$\lim_{x\to+0}x^{1-\frac{p_0}{2}}\cdot\frac{x^{p_0-1}|\ln x|}{1+x}=\lim_{x\to+0}(-x^{\frac{p_0}{2}}\ln x)=0.$$

于是积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$ 在 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 上一致收敛. 又当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时,有

$$0\leqslant\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\leqslant\frac{x^{p_1-1}\ln x}{1+x}\leqslant x^{p_1-2}\ln x,x\geqslant 1,$$

而积分 $\int_1^{+\infty}x^{p_1-2}\ln x dx$ 收敛. 这是因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{2}(1-p_1)}\cdot x^{p_1-2}\ln x=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{2}(1-p_1)}\ln x=0.$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$ 在 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 上一致收敛. 从而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$ 在 $p\in[p_0,p_1]$ 上一致收敛. 故当 $p_0\leqslant p\leqslant p_1$ 时,可在积分号下求导数有

$$\frac{d}{dp}B(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx.$$

由 p_0,p_1 的任意性知,上式对一切 $0<p<1$ 皆成立. 由于

$$\frac{d}{dp}B(p,1-p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi},$$

$$0<p<1.$$

于是有 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi},0<p<1.$$

【3864】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx.$

解 在 3863 题的基础上,考察积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x.$$

类似于3863题的证明过程，可证积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x$，当$0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<1$时一致收敛. 从而积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$可在积分号下对$p$求二阶导数有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}B(p,1-p)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)$$
$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\right)=\frac{\pi^3(1+\cos^3 p\pi)}{\sin^3 p\pi},$$
$$p_0\leqslant p\leqslant p_1.$$

由p_0,p_1的任意性知，上式对一切$0<p<1$皆成立.

【3864.1】 $\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x.$

解 由3853题的结论知

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}B\left(\frac{m+1}{3},1-\frac{m+1}{3}\right),$$

其中$-1<m<2$.

而
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{x^m}{1+x^3}\right)\mathrm{d}x,$$

下证积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x$，在$0<m_0<m<m_1<2$上一致收敛. 由

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x$$
$$=I_1+I_2,$$

知只要考察I_1,I_2在$0<m_0<m<m_1<2$上的一致收敛性即可. 事实上

$$\left|\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\right|\leqslant\frac{x^{m_0}\,|\ln x|}{1+x^3},0<x\leqslant 1.$$

又
$$\lim_{x\to+0}\frac{x^{-\frac{m_0}{2}}\cdot x^{m_0}\,|\ln x|}{1+x^3}=\lim_{x\to+0}-x^{\frac{m_0}{2}}\ln x=0,$$

于是$\int_0^1 \frac{x^{m_0}\,|\ln x|}{1+x^3}\mathrm{d}x$收敛. 于是积分$\int_0^1 \frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x$在$m_0\leqslant m\leqslant m_1$上一致收敛. 另一方面,当$m_0\leqslant m\leqslant m_1$,$x\geqslant 1$时

$$0\leqslant \frac{x^m\ln x}{1+x^3}\leqslant \frac{x^{m_1}\ln x}{1+x^3}\leqslant x^{m_1-3}\ln x,$$

又
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1+\frac{1}{2}(2-m_1)}\cdot x^{m_1-3}\ln x=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{m_1-2}{2}}\ln x=0.$$

于是积分$\int_1^{+\infty} x^{m_1-3}\ln x\mathrm{d}x$收敛. 从而$\int_1^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x$在$0<m_0\leqslant m\leqslant m_1<2$上一致收敛. 故积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x$在$0<m_0\leqslant m\leqslant m_1<2$上一致收敛. 从而当$m_0\leqslant m\leqslant m_1$时,可在积分号下求导数,

即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left[\frac{1}{3}B\left(\frac{m+1}{3},1-\frac{m+1}{3}\right)\right]=\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x,$$

由m_0,m_1的任意性,上式对一切$0<m<2$皆成立. 而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}B\left(\frac{m+1}{3},1-\frac{m+1}{3}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{\pi}{\sin\frac{m+1}{3}\pi}\right)=-\frac{\pi^2\cos\frac{m+1}{3}\pi}{3\sin^2\frac{m+1}{3}\pi},$$

于是
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}B\left(\frac{m+1}{3},1-\frac{m+1}{3}\right)$$
$$=-\frac{\pi^2\cos\frac{m+1}{3}\pi}{9\sin^2\frac{m+1}{3}\pi}.$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2\cos\frac{2}{3}\pi}{9\sin^2\frac{2}{3}\pi}=\frac{2\pi^2}{27}.$$

【3864.2】 $\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 x}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

解　由 3853 知

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}B\left(\frac{m+1}{4},1-\frac{m+1}{4}\right),$$

$$-1<m<3.$$

考察积分$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{x^m}{1+x^4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^4}\mathrm{d}x$,

和3864.1的证明过程一样,可证明积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln x}{1+x^4}\mathrm{d}x$在$-1<m_0\leqslant m\leqslant m_1<3$上一致收敛.又

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{x^m\ln x}{1+x^4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln^2 x}{1+x^4}\mathrm{d}x,$$

与3864.1的证明过程相同,可证积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln^2 x}{1+x^4}\mathrm{d}x$在$-1<m_0\leqslant m\leqslant m_1<3$上一致收敛,从而积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^4}\mathrm{d}x$可在积分号下对$m$求二阶导数($m_0\leqslant m\leqslant m_1$).

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\ln^2 x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m^2}B\left(\frac{m+1}{4},1-\frac{m+1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m^2}\left(\frac{\pi}{\sin\frac{m+1}{4}\pi}\right)=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{\pi^2\cos\frac{m+1}{4}\pi}{4\sin^2\frac{m+1}{4}\pi}\right)$$

$$=-\frac{\pi^2}{16}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{\cos\frac{m+1}{4}\pi}{\sin^2\frac{m+1}{4}\pi}\right)=\frac{\pi^3}{64}\cdot\frac{1+\cos^2\frac{m+1}{4}\pi}{\sin^3\frac{m+1}{4}\pi},$$

由m_0,m_1的任意性,上式对一切$-1<m<3$皆成立.于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{1+x^4}=\frac{\pi^3}{64}\cdot\frac{1+\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin^3\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^3}{64}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}.$$

【3865】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x.$

解 易知,当$0<p<1,0<q<1$时,积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x$

收敛. 事实上,设 $p < q$,则由

$$\lim_{x\to+0} x^{1-p}\left|\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\right| = \lim_{x\to+0}\left|\frac{1-x^{q-p}}{(1+x)\ln x}\right| = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-q}\cdot\left|\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\right| = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^{1-(q-p)}-x}{(1+x)\ln x}\right| = 0,$$

知收敛. 考察积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1-x)\ln x}\right]dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$$

$$= B(p,1-p) \qquad \text{(3852 题结论)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ 在 $p\in[p_0,p_1]$ 上一致收敛. 其中 $0 < p_0 < p_1 < 1$. 事实上,此时

$$0 < \frac{x^{p-1}}{1+x} \leqslant \frac{x^{p_0-1}}{1+x}, x\in(0,1),$$

$$0 < \frac{x^{p-1}}{1+x} \leqslant \frac{x^{p_1-1}}{1+x}, x\in[1,+\infty),$$

而积分$\int_0^1\frac{x^{p_0-1}}{1+x}dx$,$\int_1^{+\infty}\frac{x^{p_1-1}}{1+x}dx$ 皆收敛. 于是当 $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1 < 1$ 时,可在积分号下对 p 求导数有

$$I'(p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \tag{①}$$

其中 $$I(p) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx, q \text{ 固定}, 0 < q < 1.$$

由 p_0,p_1 的任意性知,① 式对一切 $0 < p < 1$ 皆成立,两端积分后有

$$I(p) = \ln\left|\tan\frac{p\pi}{2}\right| + C, 0 < p < 1,$$

其中 C 是某常数,在上式中令 $p = q$,并注意到 $I(q) = 0$,有

$$0 = I(q) = \ln\left|\tan\frac{q\pi}{2}\right| + C.$$

于是 $$C=-\ln\left|\tan\frac{q\pi}{2}\right|.$$

由此 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\mathrm{d}x=I(p)=\ln\left|\frac{\tan\frac{p\pi}{2}}{\tan\frac{q\pi}{2}}\right|,$$

$$0<p<1,0<q<1.$$

【3866】 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\mathrm{d}x\qquad(0<p<1).$

提示:这个积分可以看作是

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)].$$

解 由于

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}=\lim_{x\to1-0}\frac{(p-1)x^{p-2}+px^{-p-1}}{-1}$$
$$=1-2p.$$

于是 $x=1$ 不是瑕点,令 $p_0=\max\{p,1-p\}$,则 $0<p_0<1$,取 $p_0<p_1<1$,由于

$$\lim_{x\to+0}x^{p_1}\cdot\left|\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\right|=\lim_{x\to+0}\left|\frac{x^{p_1-(1-p)}-x^{p_1-p}}{1-x}\right|=0,$$

于是积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛 $(0<p<1)$.

考察积分(含参量 ε,$0\leqslant\varepsilon<1$)

$$I(\varepsilon)=\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}\mathrm{d}x,$$

由于

$$\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{(1-x)^{1-\varepsilon}}\leqslant\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x}\qquad x\in(0,1),$$

又 $\int_0^1\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x}\mathrm{d}x$ 收敛,于是 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 在 $\varepsilon\in[0,1)$ 上一致收敛. 因此 $I(\varepsilon)$ 是 $[0,1)$ 上的连续函数,但当 $0<\varepsilon<1$ 时有

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}\mathrm{d}x=B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon).$$

于是，由 $I(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 的(右)连续性有

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\mathrm{d}x = I(0) = \lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)].$$

由 Γ 函数和 B 函数的关系及 $\Gamma(x)$ 和 $\Gamma'(x)$ 在 $x>0$ 的连续性有

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma[\varepsilon][\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)]}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}$$

$$\cdot \lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)[\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)$$

$$-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)\Gamma(1)}\cdot \lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)[\Gamma(p)\Gamma(1$$

$$-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)]$$

$$= \sin\pi p \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\sin\pi\varepsilon}$$

$$= \sin\pi p \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Gamma(p)\Gamma'(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p+\varepsilon)}{\pi\cos\pi\varepsilon}$$

$$= \frac{\sin\pi p}{\pi}[\Gamma(p)\Gamma'(1-p)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p)].$$

又

$$\Gamma(p)\Gamma'(1-p)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p)$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\Gamma(p)\Gamma(1-p)]$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}.$$

于是有

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\mathrm{d}x = \pi\cot p\pi, 0<p<1.$$

【3867】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}\alpha x}{\mathrm{sh}\beta x}\mathrm{d}x \qquad (0<\alpha<\beta).$

解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}\alpha x}{\mathrm{sh}\beta x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2\beta}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(\alpha+\beta)x}-e^{(\beta-\alpha)x}}{1-e^{-2\beta x}}d(e^{-2\beta x})$$

$$=-\frac{1}{2\beta}\int_1^0\frac{t^{-\frac{\alpha+\beta}{2\beta}}-t^{-\frac{\beta-\alpha}{2\beta}}}{1-t}dt=\frac{1}{2\beta}\int_0^1\frac{t^{\frac{\beta-\alpha}{2\beta}-1}-t^{-\frac{\beta-\alpha}{2\beta}}}{1-t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2\beta}\cot\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2\beta}\qquad(3866\text{ 结论})$$

$$=\frac{\pi}{2\beta}\tan\frac{\alpha\pi}{2\beta}.$$

【3868】 $\int_0^1\ln\Gamma(x)dx.$

解 设 $1-x=t$，

则 $$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx.$$

相加有 $$2\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]dx$$

$$=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx=\ln\pi-\int_0^1\ln\sin\pi x dx$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin t dt$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t dt\right]$$

$$=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt$$

$$=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\qquad(2353\text{ 题结论})$$

$$=\ln 2\pi.$$

于是 $$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2\pi=\ln\sqrt{2\pi}.$$

【3869】 $\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)dx\qquad(a>0).$

解 设

$$F(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)dx=\int_0^{a+1}\ln\Gamma(x)dx-\int_0^a\ln\Gamma(x)dx,$$

有 $$F'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=\ln a,$$

两端积分有

$$F(a)=a(\ln a-1)+C,$$

其中 C 为某常数,令 $a\to+0$ 有

$$C=\ln\sqrt{2\pi},\text{(3868 结论)}.$$

于是 $$\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}.$$

【3870】 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi x\mathrm{d}x.$

解 设

$$x=1-t,$$

有 $$\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)\sin\pi t\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\sin\pi x\mathrm{d}x.$$

相加有 $$2\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi x\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\sin\pi x\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\ln\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)\sin\pi x\mathrm{d}x$$
$$=\ln\pi\cdot\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x-\int_0^1\sin\pi x\ln\sin\pi x\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$,

$$\int_0^1\sin\pi x\ln\sin\pi x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\ln\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left[\ln2+\ln\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^1 u\left[\ln 2 + \ln u + \frac{1}{2}\ln(1-u^2)\right]du$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}u^2\ln 2 + \frac{1}{2}u^2\left(\ln u - \frac{1}{2}\right)\bigg|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \ln(1-u^2)\,d(1-u^2)\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 \ln t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln 2 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(t\ln t - t)\bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}\ln 2 - \frac{2}{\pi},$$

于是有 $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\ln 2 - \frac{2}{\pi}\right)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right).$$

【3871】 $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$ （n 为自然数）.

解 设 $x = 1 - t$，

有 $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx = \int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\cos 2n\pi t\,dt$

$$= \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\cos 2n\pi x\,dx,$$

等式两端同加 $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$ 有

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= \int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= \int_0^1 (\ln\pi - \ln\sin\pi x)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= -\int_0^1 \cos 2n\pi x\ln\sin\pi x\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2nt\ln\sin t\,dt$$

$$= -\frac{1}{2n\pi}\sin 2nt\ln\sin t\bigg|_0^\pi + \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}dt$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4n\pi}\left[\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{4n\pi}(\pi+\pi) \qquad (2291\text{ 的结论})$$

$$= \frac{1}{2n},$$

于是 $$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x \mathrm{d}x = \frac{1}{4n}.$$

证明等式(3872 ~ 3875).

【3872】 $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

证 作变量代换 $x^m = u$,

有 $$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 u^{\frac{p}{m}-1}(1-u)^{q-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right)$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}-1\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}, \qquad p>0,q>0,m>0.$$

于是 $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\pi}{4}.$$

【3873】 $$\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

证 令 $x^n = t$，

于是 $$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

$$m > 0, n > 0.$$

从而 $$\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4^2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

【3874】 $\prod\limits_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

证 由 3873 证明过程的一个结论有

$$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \prod_{m=1}^{n}\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right),$$

令 $$E = \prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)$$

有 $$E^2 = \prod_{m=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right) = \prod_{m=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n}},$$

由于 $$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{m=1}^{n-1}\left(z - \cos\frac{2m\pi}{n} - i\sin\frac{2m\pi}{n}\right),$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，令 $z \to 1$，取极限有

$$n = \prod_{m=1}^{n-1}\left|1 - \cos\frac{2m\pi}{n} - i\sin\frac{2m\pi}{n}\right| = 2^{n-1}\prod_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n}.$$

于是有 $$\prod_{m=1}^{n-1}\sin\frac{m\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

从而有 $$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^n E = \frac{1}{n^n}\cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

【3875】 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1.$

证 $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$,

由 3841 知 $\Gamma(x)$ 在 $x > 0$ 上是连续函数. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \Gamma(1) = 1.$$

利用等式 $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\,dt \quad (x > 0)$. **求积分**(3876 ~ 3877).

【3876】 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}\,dx \qquad (0 < m < 1)$.

解 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}\,dx = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty} \cos ax\,dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\,dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty} t^{m-1}\,dt \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos ax\,dx$$

(交换积分顺序是合理的)

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty} t^{m-1} \frac{t}{a^2+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\tan u)^m \cdot \frac{1}{a^2\sec^2 u} \cdot a\sec^2 u\,du$$

$$= \frac{a^{m-1}}{\Gamma(m)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^m u\,du$$

$$= \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}, a > 0, (3857 \text{ 结论}),$$

交换积分顺序的合理性证明如下. 令

$$f(x,t) = \cos ax \cdot t^{m-1} e^{-xt}, 0 < m < 1, a > 0,$$

对任何 $A > 0$,我们有

$$\int_0^A dx \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,dt \leqslant \int_0^A dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\,dt$$

$$= \Gamma(m)\int_0^A \frac{dx}{x^m} < +\infty,$$

于是对$\int_0^A \mathrm{d}x\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$可交换积分顺序，有

$$\int_0^A \mathrm{d}x\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^A f(x,t)\mathrm{d}x, \qquad ①$$

但
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^A f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{d}t\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}\cos ax\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty} t^{m-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-At}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}+\frac{t}{a^2+t^2}\right]\mathrm{d}t, \qquad ②$$

又
$$\left|\frac{a\sin aA-t\cos aA}{a^2+t^2}\right|\leqslant\frac{a+t}{a^2+t^2}\leqslant M, t\in(0,+\infty)$$

其中M是某常数，于是有

$$\int_0^{+\infty}\left|t^{m-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-At}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}\right|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant M\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{d}t=\frac{M}{A^m}\int_0^{+\infty} y^{m-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{M\cdot\Gamma(m)}{A^m}.$$

因此
$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{+\infty} t^{m-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-At}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=0.$$

又注意到积分$\int_0^{+\infty} t^{m-1}\cdot\frac{t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$收敛，在②式两端令$A\to+\infty$取极限有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^A f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} t^{m-1}\cdot\frac{t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

但
$$\int_0^{+\infty} t^{m-1}\cdot\frac{t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos ax\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x.$$

于是，在①式两端令$A\to+\infty$取极限(因为右端极限存在，故左端极限也存在)有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x.$$

【3877】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^m}\mathrm{d}x \quad (0<m<2).$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^m}\mathrm{d}x=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}\sin ax\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty} t^{m-1}\,dt\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin ax\,dx$$

（交换积分是合理的）

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty} t^{m-1}\cdot\frac{a}{a^2+t^2}dt = \frac{a^{m-1}}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}\tan^{m-1}u\,du$$

$$= \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m-1}{2}\pi} = \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, a>0.$$

下面说明交换积分顺序的合理性，与 3876 题证明类似，只要注意

$$|\sin ax| \leqslant ax,\qquad a>0, x>0,$$

于是当 $0<m<2$ 时，对任意的 $A>0$，有

$$\int_0^A dx\int_0^{+\infty} |\sin ax\cdot t^{m-1}e^{-xt}|\,dt \leqslant \int_0^A dx\int_0^{+\infty} axt^{m-1}e^{-xt}\,dt$$

$$= a\Gamma(m)\int_0^A \frac{dx}{x^{m-1}} < +\infty.$$

【3878】 证明欧拉公式：

(1) $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$；

(2) $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x.$

$$\left(\lambda>0, x>0, -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

证 由于当 $0<t<+\infty$ 时

$$|t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)| \leqslant t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha},$$

令 $\lambda t\cos\alpha = u$，

有
$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\,dt = \frac{1}{(\lambda\cos\alpha)^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\Gamma(x)}{(\lambda\cos\alpha)^2} < +\infty.$$

于是积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt$ 收敛. 同理

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt.$$

也收敛. 设 $\lambda>0$ 固定，$x>0$，令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

$$I_1(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

我们有 $$\frac{\partial}{\partial\alpha}[t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda+\sin\alpha)]$$

$$=\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t+\sin\alpha)].$$

于是当 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 时，恒有

$$|t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)]|$$

$$\leqslant 2t^x e^{-\lambda t\sin\varepsilon},$$

又 $$\int_0^{+\infty}t^x e^{-\lambda t\sin\varepsilon}dt=\frac{\Gamma(x+1)}{(\lambda\sin\varepsilon)^{x+1}}<+\infty,$$

于是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}[t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)]dt$,

在 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 上一致收敛，从而可在积分号下求导数，

当 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 时有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}[t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)]dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)]dt$$

$$=\int_0^{+\infty}t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}d[\sin(\lambda t\sin\alpha)]+\int_0^{+\infty}t^x\sin(\lambda t\sin\alpha)d[e^{-\lambda t\cos\alpha}]$$

$$=t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin(\lambda t\sin\alpha)d[t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}]$$

$$+t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t\cos\alpha}d[t^x\sin(\lambda t\sin\alpha)]$$

$$=-\int_0^{+\infty}xt^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt+\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)dt$$

$$-\int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt-\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)dt$$

$$=-2x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt$$

$$-\int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha)-\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)]dt$$

$$=-2xI_1(\alpha)-I'(\alpha).$$

于是 $$I'(\alpha)=-xI_1(\alpha),-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon. \qquad ①$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性有，① 式对一切 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 皆成立. 同理有 $$I'_1(\alpha)=xI(\alpha),-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, \qquad ②$$

由 ① 和 ② 式有

$$I''(\alpha)+x^2I(\alpha)=0,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

解之有 $$I(\alpha)=C_1\cos\alpha x+C_1\sin\alpha x,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, \qquad ③$$

其中 C_1,C_2 是两个常数，在 ③ 式中令 $\alpha=0$ 有

$$C_1=I(0)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t}dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x},$$

又在 ① 式中令 $\alpha=0$ 有

$$I'(0)=-xI_1(0). \qquad ④$$

由 ③ 式有

$$I'(0)=I'(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=(-C_1x\sin\alpha x+C_1x\cos\alpha x)\Big|_{\alpha=0}$$

$$=C_2x,$$

又显然 $I_1(0)=0$，于是由 ④ 式有 $C_2=0$，从而

$$I(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x,\qquad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

$$I_1(\alpha)=-\frac{1}{x}I'(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

【3879】 求曲线 $r^n = a^n\cos n\varphi$ （$a>0$，n 为自然数）. 的弧长

解 所求弧长为

$$S = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi = 2na\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos^{\frac{1}{n}-1}n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{n}-1}t\,\mathrm{d}t = aB\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right).\text{（3856 的结论）}.$$

【3880】 求曲线 $|x|^n+|y|^n=a^n$ （$n>0$，$a>0$）. 所界定的面积

解 所求面积为

$$A = 4\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \frac{4a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4a^2}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right) = \frac{4a^2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$= \frac{2a^2}{n}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

§5. 傅里叶的积分公式

1. **用傅里叶积分表示函数** 若(1) 函数 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上有定义;(2) 在每一个有穷区间该函数与其导数 $f'(x)$ 均是分段连续的;(3) 在区间$(-\infty,+\infty)$绝对可积分，则该函数在其所有连续点上可以表示为傅里叶积分形式.

$$f(x) = \int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda. \qquad ①$$

其中 $a(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi,$

$b(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi.$

在函数 $f(x)$ 的不连续点上，公式 ① 的左边应当用 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ 取代.

对于偶函数 $f(x)$，对不连续点加上同样的注释，公式 ① 给出：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda. \tag{②}$$

其中 $$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi.$$

同样，对于奇函数 $f(x)$ 得出：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \tag{③}$$

其中 $$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi.$$

2. **在区间 $(0,+\infty)$ 用傅里叶积分表示函数** 在区间 $(0,+\infty)$ 给定的函数 $f(x)$ 在每一个有穷区间 $(a,b)\subset(0,+\infty)$ 与其导数 $f'(x)$ 均分段连续，在 $(0,+\infty)$ 区间绝对可积分，因此在指定区间可以任意选用公式 ②（偶性延拓）或者公式 ③（奇性延拓）来表示函数 $f(x)$.

用傅里叶积分表示以下函数(3881 ～ 3894).

【3881】 $f(x)=\begin{cases}1, & 若\ |x|<1;\\ 0, & 若\ |x|>1.\end{cases}$

解 由于函数 $f(x)$ 在 $x\neq 1$ 有定义，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任何有穷区间上皆分段连续，特别地 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty,$$

于是可将 $f(x)$ 表示傅里叶积分形式（以下各题若不加说明，皆满足傅里叶积分展开式成立的条件），又 $f(x)$ 为偶函数，于是 $b(\lambda)=0$，且 $a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}$.

从而，当 $|x|\neq 1$ 时，（$|x|\neq 1$ 为 $f(x)$ 的连续点）有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda,$$

当 $|x|=1$ 时为不连续点，又

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{f(-1,0)+f(-1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

于是 $$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}.$$

【3882】 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & 若\ |x|<1;\\ 0, & 若\ |x|>1.\end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $a(\lambda)=0$，且

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda},$$

从而，当 $0<|x|\neq 1$ 时为连续点有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

当 $x=0$ 时，虽不为连续点，但由

$$\frac{f(0+0)-f(0-0)}{2}=0,f(0)=0.$$

且右端积分显然为零，于是上式仍成立. 当 $|x|=1$ 时为不连续点，由 $$\frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

于是 $$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda\cdot\operatorname{sgn}x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x.$$

【3883】 $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)\qquad(b>a).$

解 $a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\pi}\int_a^b 2\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi$

$$= \frac{2(\sin b\lambda - \sin a\lambda)}{\pi\lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{b} 2\sin\lambda\xi \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{2(\cos a\lambda - \cos b\lambda)}{\pi\lambda}.$$

于是 $$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda + b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\lambda(x-a) - \sin\lambda(x-b)}{\lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

当 $x = a$ 或 b 时，$f(x) = 1$，而

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2} = 1,$$

$$\frac{f(b+0)+f(b-0)}{2} = 1,$$

于是上式对不连续点 a,b 也成立.

【3884】 $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & 若 |x| \leqslant a; \\ 0, & 若 |x| > a. \end{cases}$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数，故

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi = \frac{2h}{\pi}\int_{0}^{a}\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{2h(1-\cos a\lambda)}{\pi a\lambda^2}.$$

于是 $$f(x) = \frac{2h}{\pi a}\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$f(x)$ 处处连续. 于是不再讨论点 $x = \pm a$，以下各题类似.

【3885】 $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2} \qquad (a > 0).$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a} < +\infty,$$

收敛. 于是

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda\xi}{a^2+\xi^2}d\xi$$

$$=\frac{2}{a\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda a x}{1+x^2}dx=\frac{2}{a\pi}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-a|\lambda|}\text{（3825 的结论）}$$

$$=\frac{1}{a}e^{-a|\lambda|}.$$

从而 $$f(x)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda,$$

即 $$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda,-\infty<x<+\infty.$$

【3886】 $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}\qquad(a>0)$.

解 $f(x)$ 是连续的奇函数，于是

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\xi\sin\lambda\xi}{a^2+\xi^2}d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin a\lambda x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-a\lambda}\qquad\text{（3826 的结论）}$$

$$=e^{-a\lambda},$$

但我们不能根据傅里叶积分的理论来断定展开式

$$\frac{x}{a^2+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda,-\infty<x<+\infty,\qquad ①$$

成立，这是因为函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$ 不是绝对可积的

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x}{a^2+x^2}\right|dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{a^2+x^2}dx=\ln(a^2+x^2)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=+\infty,$$

但我们可以直接验证展开式 ① 是成立的，事实上有

$$\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda=\frac{e^{-a\lambda}(-a\sin\lambda x-x\cos\lambda x)}{a^2+x^2}\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty}$$

$$=\frac{x}{a^2+x^2},-\infty<x<+\infty.$$

【3887】 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 若\ |x|\leqslant\pi;\\ 0, & 若\ |x|>\pi.\end{cases}$

解 $f(x)$ 为连续的奇函数，于是

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2\sin\lambda\pi}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

从而 $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda,-\infty<x<+\infty.$$

【3888】 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 若\ |x|\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0, & 若\ |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

解 $f(x)$ 为连续的偶函数，有

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)},$$

于是 $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda,x\in(-\infty,+\infty).$$

【3889】 $f(t)=\begin{cases}A\sin\omega t, & 若\ |t|\leqslant\frac{2\pi n}{\omega};\\ 0, & 若\ |t|>\frac{2\pi n}{\omega}(n\ 为自然数)\end{cases}$

解 $f(t)$ 为连续的奇函数，有

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2A}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi n}{w}}\sin w\xi\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{2Aw\sin\frac{2\pi n\lambda}{w}}{\pi(\lambda^2-w^2)}.$$

于是 $$f(t)=\frac{2Aw}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{w}}{\lambda^2-w^2}\sin\lambda t\mathrm{d}\lambda,t\in(-\infty,+\infty).$$

【3890】 $f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\quad(\alpha>0).$

解 $f(x)$ 为连续的偶函数，且绝对可积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx < +\infty,$$

于是 $$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\cos\lambda\xi d\xi$$
$$= \frac{2\alpha}{\pi(\lambda^2+\alpha^2)}.$$

从而 $$f(x) = e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

【3891】 $f(x) = e^{-\alpha|x|}\cos\beta x \qquad (\alpha > 0)$.

解 $f(x)$ 为连续的偶函数,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,|\cos\beta x|\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx < +\infty,$$

知其绝对可积,于是

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\cos\beta\xi\cos\lambda\xi d\xi$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[\cos(\lambda+\beta)\xi + \cos(\lambda-\beta)\xi]e^{-\alpha\xi}d\xi$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2} + \frac{\alpha}{(x-\beta)^2+\alpha^2}\right],$$

从而

$$e^{-\alpha|x|}\cos\beta x = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda,$$
$$x\in(-\infty,+\infty).$$

【3892】 $f(x) = e^{-\alpha|x|}\sin\beta x \qquad (\alpha > 0)$.

解 $f(x)$ 为连续的奇函数,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,|\sin\beta x|\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx < +\infty,$$

于是 $$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\sin\beta\xi\sin\lambda\xi d\xi$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[\cos(\lambda-\beta)\xi - \cos(\lambda+\beta)\xi]e^{-\alpha\xi}d\xi$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2} - \frac{\alpha}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{4\lambda\alpha\beta}{\pi[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}.$$

从而 $e^{-\alpha|x|}\sin\beta x = \dfrac{4\alpha\beta}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}d\lambda,$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

【3893】 $f(x) = e^{-x^2}$.

解 $f(x)$ 为连续的偶函数，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} < +\infty,$$

于是 $$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \qquad (3809\text{ 的结论})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

从而 $$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda, x \in (-\infty, +\infty).$$

【3894】 $f(x) = xe^{-x^2}$.

解 $f(x)$ 为连续的奇函数，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xe^{-x^2}|dx = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx < +\infty,$$

于是 $$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \xi e^{-\xi^2}\sin\lambda\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda\xi d(1-e^{-\xi^2})$$

$$= -\frac{1}{\pi}e^{-\xi^2}\sin\lambda\xi\Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi d\xi$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi d\xi = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

(3809 的结论)

$$= \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

从而 $$xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x\,d\lambda,x\in(-\infty,+\infty).$$

【3895】 用傅里叶积分表示函数

$$f(x)=e^{-x}\qquad(0<x<+\infty).$$

(1) 用偶性延拓;(2) 用奇性延拓.

解 $f(x)=e^{-x}$ 在$[0,+\infty]$上连续,且

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1<\infty,$$

(1) 若偶延拓,则

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\xi}\cos\lambda\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是 $$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda,x\in(0,+\infty).$$

因按偶延拓的函数在点 $x=0$ 处连续,于是上式当 $x=0$ 时也成立.从而上式成立的范围是 $x\in[0,+\infty)$.

(2) 若用奇延拓,有

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\xi}\sin\lambda\xi d\xi$$

$$=\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)},$$

于是 $$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda,x\in(0,+\infty).$$

但 $x=0$ 时,上式不成立,事实上,在 $x=0$ 处,右端为 1,右端为 0.

对于函数 $f(x)$,求出傅里叶变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-itx}dt,$$

若:(3896 ~ 3900).

【3896】 $f(x)=e^{-\alpha|x|}\qquad(\alpha>0).$

解　$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-itx}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}(\cos x-i\sin x)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}\cos tx\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos tx\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}.$$

【3897】　$f(x)=xe^{-\alpha|x|}\qquad(\alpha>0)$.

解　$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\alpha|t|}e^{-itx}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\alpha|t|}(\cos tx-i\sin tx)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}i\cdot\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\sin tx\,\mathrm{d}t.$$

又　$$I=\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\sin tx\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}t\sin tx\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}(\sin tx+tx\cos tx)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\sin tx\,\mathrm{d}t+\frac{x}{\alpha}\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\cos tx\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}-\frac{x}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\cos tx\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\frac{x}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}(\cos tx-tx\sin tx)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}+\frac{x}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos tx\,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{x^2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}te^{-\alpha t}\sin tx\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}+\frac{2x}{\alpha^2(\alpha^2+x^2)}-\frac{x^2}{\alpha^2}I,$$

于是 $$\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)I=\frac{2x}{\alpha(\alpha^2+x^2)}.$$

即 $$I=\frac{2\alpha x}{(\alpha^2+x^2)^2}.$$

从而 $$F(x)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\cdot\frac{\alpha x}{(\alpha^2+x^2)^2}.$$

【3898】 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

解 $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}(\cos tx-i\sin tx)\,\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos tx\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

(3809 的结论)

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

【3899】 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$.

解 $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t\,\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t(\cos tx-i\sin tx)\,\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t\cos tx\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}[\cos(\alpha+x)t+\cos(\alpha-x)t]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos(\alpha+x)t\,\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cos(\alpha-x)t\,\mathrm{d}t\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha+x)^2}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}}\right]$$

(3809 的结论)

$$= e^{-\frac{a^2+x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-ax}+e^{ax}}{2} = e^{-\frac{a^2+x^2}{2}} \cdot \mathrm{ch}\, ax.$$

【3900】 求函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$. 若

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(y)\cos xy\,dy = \frac{1}{1+x^2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(y)\sin xy\,dy = e^{-x} \qquad (x>0)$.

解 (1) 令 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续且绝对可积,于是按偶函数延拓有

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(y)\cos xy\,dy, \qquad x \geqslant 0,$$

其中

$$\varphi(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\lambda)\cos\lambda y\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda y}{1+\lambda^2}d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}e^{-y} \qquad (3825\text{ 的结论})$$

$$= e^{-y}.$$

因此,函数

$$\varphi(y) = e^{-y}, y \geqslant 0,$$

满足如下等式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \varphi(y)\cos xy\,dy, x \geqslant 0.$$

注:$x<0$ 时,上式也成立,因为

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-x)^2} = \int_0^{+\infty} \varphi(y)\cos(-x)y\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(y)\cos xy\,dy.$$

(2) 设 $g(x) = e^{-x}, \qquad x>0$,

则 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上连续且绝对可积,于是按奇函数延拓有

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \psi(y)\sin xy\,dy, \qquad x>0.$$

其中 $$\psi(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}g(\lambda)\sin\lambda y\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\sin\lambda y\,\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{1+y^2},y\geqslant 0.$$

故函数 $$\psi(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{1+y^2},y\geqslant 0.$$

满足如下等式

$$\mathrm{e}^{-x}=\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,\mathrm{d}y,x>0.$$